巡回有向である一対比較値行列（3 × 3）の評点化の妥当性について

A Note on the Validity of the Scoring in Pairwise Comparison Matrices（3 × 3）with Cyclic Directed Graph

田　中　浩　光
Hiromitsu TANAKA

和文要旨：

本稿では、比較項目数を 3 とする、巡回有向の一対比較値行列値に限定して、評点付けの妥当性について考察する。AHP における妥当性の評価においては、サーティの誤差モデルの守備範囲に着目する。評点付けの妥当性を測る指標として、誤差モデルにおける重みの存在の有無をとりあげる。誤差モデルの守備範囲は誤差の大きさで緩和される。

英文要旨：

Abstract　In this paper ,we have pairwise comparison value matrices（3 × 3）with cyclic directed graph.We consider and investigate the effectiveness of the Saaty's error's model for the cyclic directed matrices（3 × 3）. We discuss at the validity of Saaty's scoring procedure , based on the numerical evaluations.

和文キーワード：AHP、一対比較値行列（3 × 3）、巡回有向、サーティの誤差モデル、サーティの整合性指標

英文キーワード：Analytic Hierarchy Process、pairwise comparison value matrix（3 × 3）、cyclic directed graph、Saaty's error's model 、Saaty's consisitency index

1. はじめに

AHP（Analytic Hierarchy Process）方式の成否は、一対比較値行列を構成する評点集合の信頼性に依存する。サイクルと呼ばれる、巡回有向の一対比較値行列は、推移則を満たさない評点付け（scoring）であり、信頼性が問われることになる。通常、一対比較値行列の信頼性の点検指標として、サーティの整合性指標 C.I.（Consistency Index：C.I.）が適用されるが、巡回有向の一対比較値行列のすべてに対し、C.I. 基準では信頼性が認められない。田中（2010a）は、AHP の実施においてはサイクルの出現が多いことを指摘したうえで、AHP 方式での首尾一貫性の観点に基づき、可能な限りサーティの誤差モデルの適用が望ましいとする。本稿では、比較項目数が 3 である一対比較値行列に限定する。その理由は、項目数に起因する撹乱要因の影響を排除できる点にある。本稿では、巡回有向の一対比較値行列（3 × 3）がサーティの誤差モデルにしたがうとして、評点付けでの比例性の縛りを制約条件として、重みの存在の有無を調べる。数値評価では、とくにサーティの誤差モデルを構成する誤差の大きさの影響、すなわち重みの存在条件の緩和について考察する。C.I. と緩和な整合性指標（2007）を参照とする。

2. 評点化過程と重要度の導入

比較対象の 3 項目に対する一対比較では、下記の手順（1),(2）を通して、一対比較値行列 A を得る。

$A_3 = \{a_{ij}\}$

ここに、i,j = 1,2,3 に対し、

$a_{ij}^{-1} = a_{ji}$，　$a_{ii} = 1$　（1）

$\max(a_{ji}、a_{ij}) \in \{1、・・・、9\}$　（2）

評点 a_{ij} は、逆数対称化（1)、離散化に伴う値域の有界性（2）の縛りを受けることに留意する。

サーティによる AHP では、次の 2 つの想定が重要である。

①比較対象の 3 項目に対し、評価者の有する潜在的な重要度（以下、重み）W = $\{w_i\}$ を導入する。

②潜在的な（真の）重み $\{w_i\}$ に基づいて、比尺度性の想定もとで項目対の相対評価がなされる。

$a_{ij} \fallingdotseq (w_i / w_j)$　（3）

一対比較値の評点化過程を図 1 に示す（田中（2007）など)。

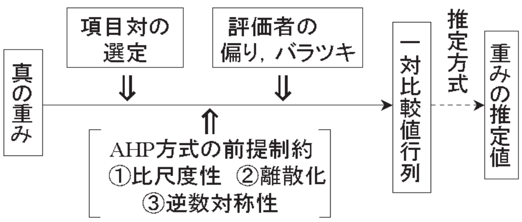

図 1. AHP における一対比較での評点化過程

3. サーティの整合性指標 C.I. と緩和な整合性基準

図 1 に基づき、一対比較値の生成について考える。誤差モデル（4）は重要度（以降、重み）W を変量ではなく母数として扱うことに留意する。すなわち、重み W = $\{w_i\}$ は、評価者固有の固定値であり、一対比較の実施に対し不変とする。

本報告では、評点 a_{ij} に対して、誤差モデル (4) を想定する。

$a_{ij} = (w_i / w_j) \cdot \varepsilon_{ij}$　（4）

ここに、E = $\{\varepsilon_{ij}\}$ は AHP 方式に付随する制約（離散化など）の調整を含む誤差を表す。

重みの推定は、Saaty の固有値法で得られるのが通常である。

〔固有値法〕

$AU_{max} = \lambda_{max} \cdot U_{max}$　（5）

ここに、λ_{max}：A の最大固有値、U_{max}：λ_{max} に対応する主固有ベクトル、$U_{max} = \{u_i\}$。

u_i を第 i 項目の重みとする。固有値法で求められた u_i を重み w_i の推定値と考えることができる。

一対比較値の整合性の点検には、サーティの整合性指標 C.I.（Consistency Index）が用いられる。

$C.I. = (\lambda_{max} - 3) / (3 - 1)$　（6）

$\lambda_{max} = 3 + \sum\sum(u_i - a_{ij}\ u_j)\ 2/(a_{ij}\ u_i\ u_j)$　（7）

相対残差

$e_{ij} = a_{ij} / (u_i / u_j)$　（8）

で表すとき、

$C.I. = \sum\sum(e_{ij} - 1) / \{2 \cdot {}_3C_2\}$　（9）

を得る（仁科・柴山（1992)、田中（2007))。

サーティの経験則によれば、C.I. ≦ 0.1 のとき、サーティの意味の整合性が認められるとする。

項目数 3 のとき、C.I. ≦ 0.1 の成立は、すなわち $\triangle_{abc}$ では、

$3.78^{-1} \leqq ab/c \leqq 3.78$　（10）

が成立することと同等である（小澤（2004)、田中（2007))。ここに、3 項目を①、②、③と表し、①→②、②→③、③→①の順序が成立するとする。3 項目の一対比較値行列 A_3 を巡回有向グラフで考える。a、b、c はそれぞれ①→②、②→③、③→①に対応する評点とする。以降では、便宜的に a_{12}、a_{23}、a_{31} の代用として a,b,c を用いて、評点に表される行列を $\triangle_{abc}$ と記す。

「緩和な整合性基準」

所与の $\triangle_{abc}$ に対し、下記の条件が成立するとき、緩和な整合性基準を満足する（田中（2009))。

$\max(a,b,c) \leqq k$　（11）

ここに、k は正数（1≦k≦9）である。本稿では、k= 3 とする。

4. 非巡回有向の一対比較値行列（3 × 3）と C.I.

本節では、一対比較値行列$\triangle_{abc}$が巡回有向となる C.I. の挙動を調べる。ここに、a≧2、b≧2、c≧2。このとき、主固有値λ、重みの推定値 $\{u_i\}$、と C.I. は、それぞれ次の通りである。

$\delta = abc$

$\lambda = 1 + \delta^{1/3} + \delta^{-1/3}$

$C.I. = \{-2 + \delta^{1/3} + \delta^{-1/3}\}/2$

$u_1 = \{a\delta^{-1} - a(1-\lambda)\}/T$、$u_2 = (\lambda-2)\lambda/T$

$u_3 = \{b^{-1}\delta - b^{-1}(1-\lambda)\}/T$

ここに、$T = a\delta^{-1} - a(1-\lambda) + (\lambda-2)\lambda + b^{-1}\delta - b^{-1}(1-\lambda)$

上記の結果から、事実 1、事実 2、事実 3 が得られる。

「事実 1」

主固有値λは、a=2、b=2、c=2 のとき、最小値をとる（$\lambda = 0.25$）。

「事実 2」

C.I. は非負であり、abc の関数である。

abc≧8 であるので、C.I. は単調増加となる（田中（2007a））。

「事実 3」

$a = b = c$ のとき、$u_1 = u_2 = u_3 = 1/3$。

「証明」

u_1、u_2、u_3 の比較においては、分母は T と共通であるので、分子のみにて比較する。

題意より、a = b = c から、u_1、u_2、u_3 については、c に統一して整理する。

$u_1 = a\delta^{-1} + a(\lambda-1) = c^{-2} + c(\delta^{1/3} + \delta^{-1/3})$

$= c^2 + c^{-2} + 1$

$u^2 = (\lambda-2)\lambda = (\delta^{1/3} + \delta^{-1/3})^2 - 1$

$= c^2 + c^{-2} + 1$

$u^3 = b^{-1}\delta + b^{-1}(\lambda-1)$

$= c^2 + c^{-1}(\delta^{1/3} + \delta^{-1/3}) = c^2 + c^{-2} + 1$

したがって、

$T = u_1 + u_2 + u_3 = 3(c^2 + c^{-2} + 1)$

$u_1 = u_2 = u_3 = 1/3$

を得る。

ここでは、一対比較値行列（3 × 3）と C.I. の関係を調べる。一対比較値行列$\triangle_{abc}$を巡回有向グラフで表す（図 2）。以下、田中（2010a）にしたがって、一対比較値行列$\triangle_{abc}$(c=1）の C.I. に及ぼす影響をみるために、C.I. 基準を満足する評点の組（a,b,c）の数を調べる（表 1、図 3 を参照）。

表 1. C.I. 基準を満足する評点の組（a、a、1）の数

a	C.I. ≦0.1	C.I≦0.15	C.I.> 0.1
2	0	1	63
3	0	0	64
4	0	0	64
5	0	0	64
6	0	0	64
7	0	0	64
8	0	0	64
9	0	0	64
合計	0	1	511

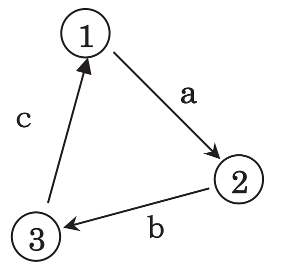

図 2. 巡回有向（3 × 3）：$\triangle_{abc}$

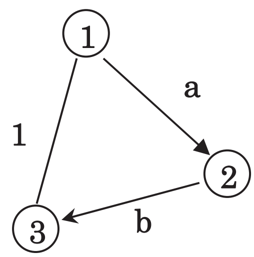

図 3. c=1 のときの巡回有向（3 × 3）：$\triangle_{abc}$

5. 比例性に基づく重みの存在

本節では、3 項目からなる一対比較値行列に対し、評点付けでの重みの比例性に着目する。数値評価の設計では、A_3(a, b, c) が所与のとき、重みを W=(w_1, w_2, w_3) の存在、下記の制約条

件を満足する重み W（実行可能解)、を確める。図3には、$w_1+w_2+w_3=1$、$w_1 \geqq w_2 \geqq w_3 \geqq 0$ の範囲を与える。定式化では、

実行可能解 w は次の条件を満たさなければならない。線形不等式の制約が異なることに注意が要る

$J(a) >$ $(w_1 / w_2)\ \varepsilon_{12} \geqq a\text{-}1/2$　(c1)
$J(b) >$ $(w_2 / w_3)\ \varepsilon_{23} \geqq b\text{-}1/2$　(c2)
$J(c) >$ $(w_3 / w_1)\ \varepsilon_{31} \geqq c\text{-}1/2$　(c3)
$J(a) = a + 1/2$　$a \in$〔1,2,3,4,5,6,7,8〕
　$= \infty$　　$a = 9$　　:$J(b)$、$J(c)$ も同様。
ここに、$w_1+w_2+w_3=1$、$w_1 \geqq w_2 \geqq w_3 \geqq 0$

(c1)、(c2)、(c3) を評点 a、b、c で整理すると、次のようになる。
（ｉ）　$a \neq 9$、$b \neq 9$、$c \neq 9$ の場合、
$\varepsilon_{12}\ w_1 + (a+1/2)w_2 > 0$　　(c1a)
$\varepsilon_{12}\ w_1 - (a\text{-}1/2)w_2 \geqq 0$　　(c1b)
$-\varepsilon_{23}\ w_2 + (b+1/2)w_3 > 0$　　(c2a)
$\varepsilon_{23}\ w_2 - (b\text{-}1/2)w_3 \geqq 0$　　(c2b)
$-\varepsilon_{31}\ w_3 + (c+1/2)w_1 > 0$　　(c3a)
$\varepsilon_{31}\ w_3 - (c\text{-}1/2)w_1 \geqq 0$　　(c3b)
ここに、$w_1+w_2+w_3=1$、$w_1 \geqq w_2 \geqq w_3 \geqq 0$

下記には、実行可能解が存在するか否かを、図的に見るために、平面 (w_1,,w_2) の視察による事から、上記の式を w_1,,w_2 で整理する。
$-\varepsilon_{12}\ w_1 + (a+1/2)w_2 > 0$　　(c1a)
$\varepsilon_{12}\ w_1 - (a\text{-}1/2)w_2 \geqq 0$　　(c1b)
$-(b+1/2)w_1 - (b+1/2+\varepsilon_{23})w_2$
　　$+ (b+1/2) > 0$ (c2a)
$(b\text{-}1/2)w_1 + (b-1/2+\varepsilon_{23})w_2$
　　$-(b\text{-}1/2) \geqq 0$ (c2b)
$(c+1/2+\varepsilon_{31})w_1 + \varepsilon_{31}\ w_2$
　　$-\varepsilon_{31} > 0$ (c3a)
$-(c\text{-}1/2+\varepsilon_{31})w_1 - \varepsilon_{31}\ w_2$
　　$+\varepsilon_{31} \geqq 0$ (c3b)
ここに、$w_1 \geqq 0$、$w_2 \geqq 0$

（ⅱ）　評点 a、b、c のいずれかが 9 の場合、
上記の（ｉ）の上限に対応する制約（c1a)、(c2a)、(c3a) を除くことになる。

6. 数値評価

(1)　設計

a.　巡回有向となる A_3
①　評点 c のみ 2 として、評点 a,b が $a=b$、$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 1$ である場合
②　評点 a,b,c において、a=b=c=2、$\varepsilon_{ij} = 1/2$、1、2 である場合
③　評点 a,b,c において、a=b=c=3、$\varepsilon_{ij} = 1/2$、1、2 である場合

b.　評価指標

下記の制約条件（①、2）の下で、重み w の存在の有無を調べる。
①　$w_1+w_2+w_3=1$、$w_1 \geqq w_2 \geqq w_3 \geqq 0$
②　$w_1+w_2+w_3=1$、$w_1 \geqq 0, w_2 \geqq 0, w_3 \geqq 0$

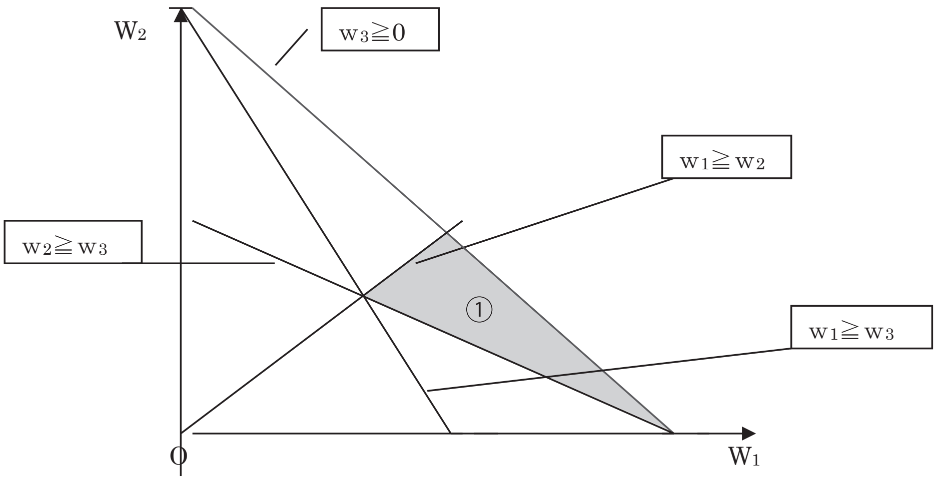

図 4.　重みの存在領域：w1 ＋ w2 ＋ w3=1、w1 ≧ w2 ≧ w3 ≧ 0

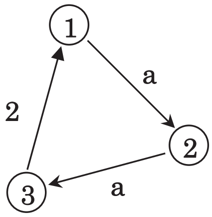

図 5a.　a=b、c=2 の場合

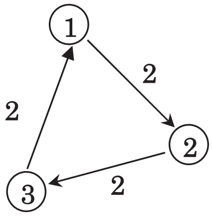

図 5b.　a=b=c=2 の場合

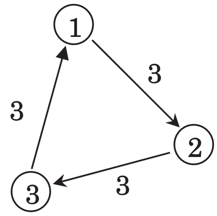

図 5c.　a=b=c=3 の場合

(2)　数値評価

6節の（1）の設計にしたがう。所与である$\triangle_{abc}$において、5節での線形不等式制約を満たす実行可能解を得る。以下、結果を整理する。表2には一対比較値行列（c=2、a=b：$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 1$）に対して、表3、4、5にはそれぞれ一対比較値行列（a=b =c=2：ε_{ij} = 1/2、1,2)、(a=b =c= 3：ε_{ij} = 1/2、1,2)、(a=b=c=4：ε_{ij} = 1/2、1,2) に対して、重みの存在の有無とC.I. 基準、緩和整合性基準による結果を与える。ここに、表2、3、4での表示で、〇は条件を満足すること、また×は満足しないことを意味する。表2、3、4、5には、それぞれ図6a、6b、6c、6dが対応する。図6a、6b、6c、6dでの灰色部分は$w_1+w_2+w_3=1$、$w_1 \geqq 0$、$w_2 \geqq 0$、$w_3 \geqq 0$、斜線部分は$w_1+w_2+w_3=1$、$w_1 \geqq w_2 \geqq w_3 \geqq 0$を表す。

表 2.　重みの存在と C.I. 基準、緩和整合基準：c=2、a=b となる一対比較値行列

a 値	△ abc :(a,a,2)	(w_1,w_2,w_3) の存在 : $w_1 \geqq w_2 \geqq w_3 \geqq 0$			: $w_1 \geqq 0, w_2 \geqq 0, w_3 \geqq 0$			緩和整合基準	C.I. 基準
		ε_{ij}=1/2	=1	=2	ε_{ij}=1/2	=1	=2		
2	(2,2,2)	×	〇	×	×	〇	〇	〇	×
3	(3,3,2)	×	×	×	×	×	×	〇	×
4	(4,4,2)	×	×	×	×	×	×	×	×
5	(5,5,2)	×	×	×	×	×	×	×	×
6	(6,6,2)	×	×	×	×	×	×	×	×
7	(7,7,2)	×	×	×	×	×	×	×	×
8	(8,8,2)	×	×	×	×	×	×	×	×
9	(9,9,2)	×	×	×	×	×	×	×	×

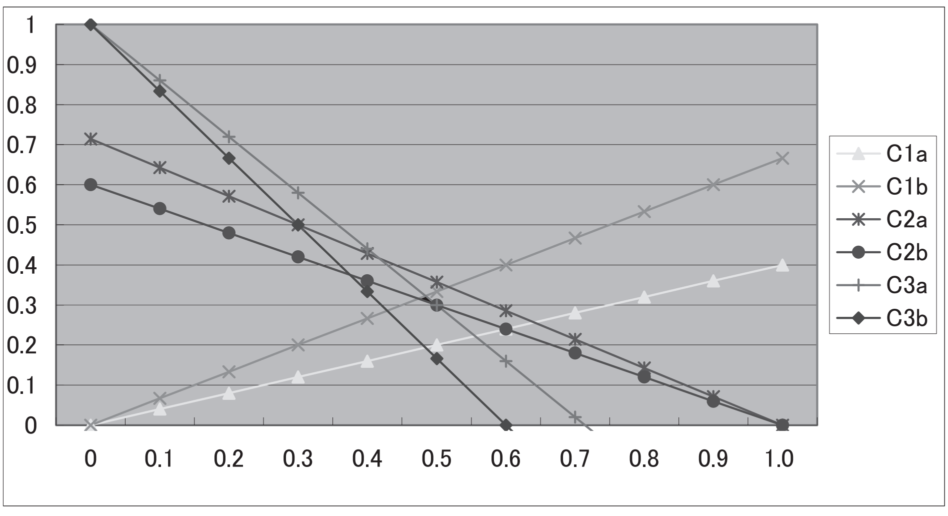

図 6a.　実行可能解 W の存在領域：a=2、b=2、c=2 の場合

表 3. 誤差の大きさ ε_{ij} による重みの存在：一対比較値行列△ abc（a=b=c=2）。
：C.I. 基準×、緩和整合基準○

No.	誤差 ε_{ij} の大きさ （ε_{12}, ε_{23}, ε_{31},）	（w_1,w_2,w_3）の存在 $w_1 \geqq w_2 \geqq w_3 \geqq 0$	 $w_1 \geqq 0, w_2 \geqq 0, w_3 \geqq 0$
1	(1,1,1)	○	○
2	(1/2,1/2,1/2)	×	×
3	(1/2,1/2, 2)	×	×
4	(1/2,2,1/2)	○	○
5	(1/2,2,2)	×	×
6	(2,1/2,1/2)	×	○
7	(2,1/2,2)	×	×
8	(2,2,1/2)	×	○

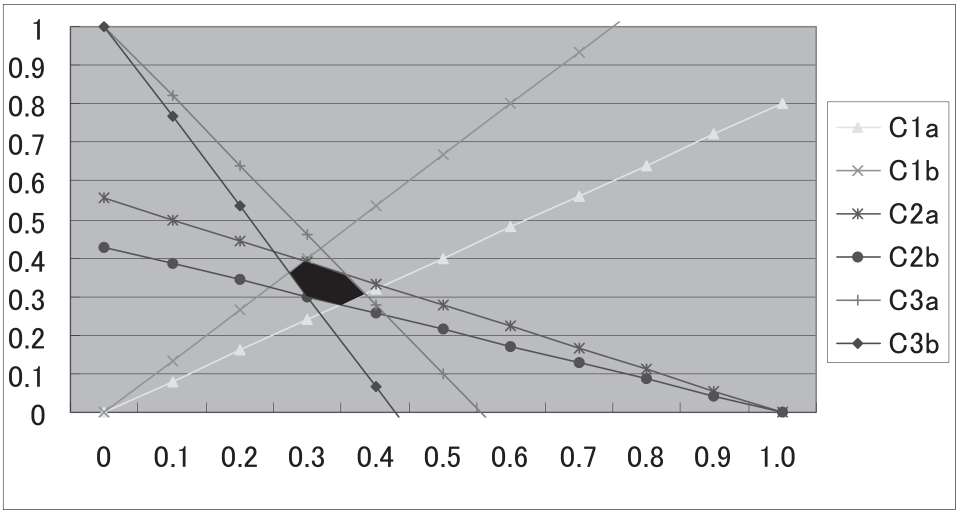

図 6b. a=b=c=2、：ε_{12} =2、ε_{23} =2、ε_{31} =2 である場合

表 4. 誤差の大きさ ε_{ij} による重みの存在：一対比較値行列△abc（a=b=c=3）。
：C.I. 基準×、緩和整合基準○

No.	誤差 ε_{ij} の大きさ （ε_{12}, ε_{23}, ε_{31},）	（w_1,w_2,w_3）の存在 $w_1 \geqq w_2 \geqq w_3 \geqq 0$	 $w_1 \geqq 0, w_2 \geqq 0, w_3 \geqq 0$
1	(1,1,1)	×	×
2	(1/2,1/2,1/2)	×	×
3	(1/2,1/2,2)	×	×
4	(1/2,2,1/2)	○	○
5	(1/2,2,2)	×	×
6	(2,1/2,1/2)	○	○
7	(2,1/2,2)	×	×
	(2,2,1/2)	×	×
8	(2,2,2)	○	○

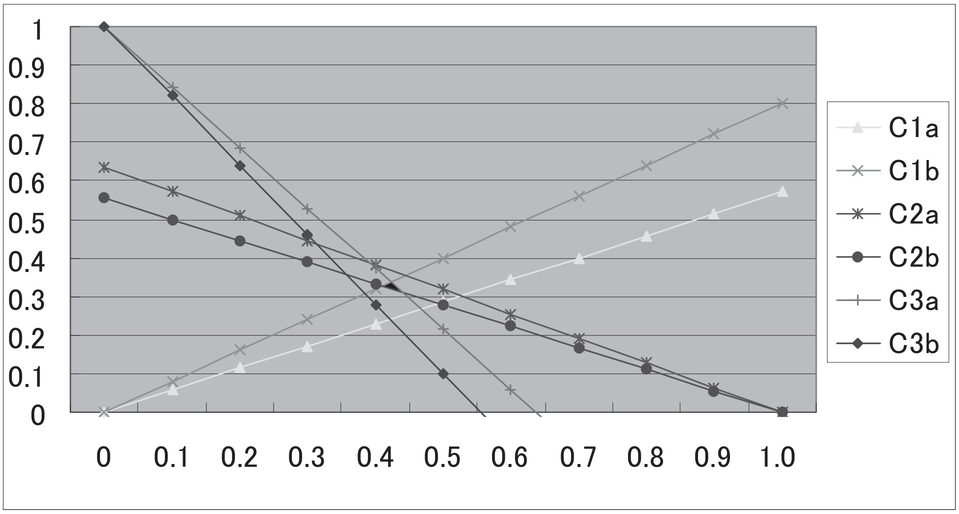

図 6c.　a=b=c=3、：ε 12 =2、ε 23 =2、ε 31 =2 である場合

表 5.　誤差の大きさ ε ij による重みの存在：一対比較値行列△abc（a=b=c=4）。
：C.I. 基準×、緩和整合基準×

No.	誤差 ε ij の大きさ（ε 12, ε 23, ε 31,）	（w_1,w_2,w_3）の存在 $w_1 \geqq w_2 \geqq w_3 \geqq 0$	：$w_1 \geqq 0, w_2 \geqq 0, w_3 \geqq 0$
1	(1,1,1)	×	×
2	(1/2,1/2,1/2)	×	×
3	(1/2,1/2,2)	×	×
4	(1/2,2,1/2)	×	×
5	(1/2,2,2)	×	×
6	(2,1/2,1/2)	×	×
7	(2,1/2,2)	×	×
	(2,2,1/2)	×	×
8	(2,2,2)	×	×

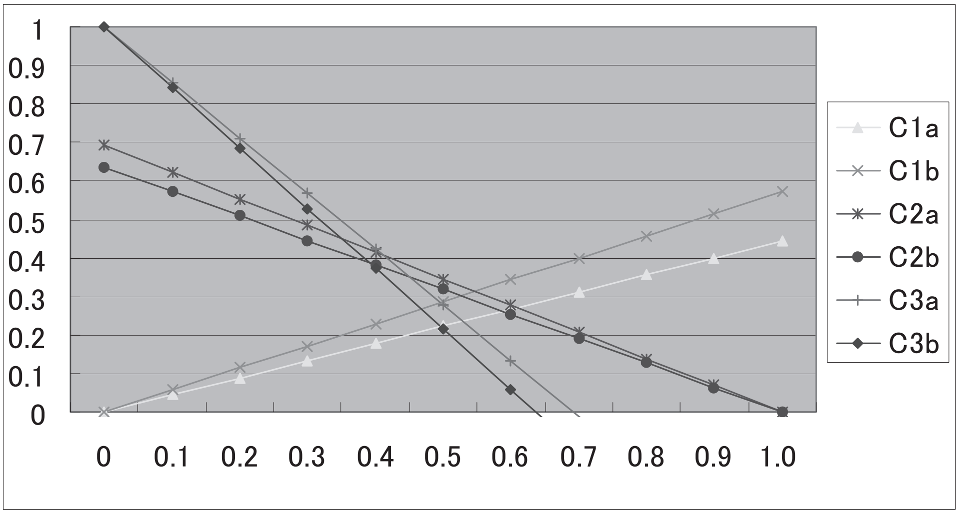

図 6d.　a=b=c=4、：ε 12 =2、ε 23 =2、ε 31 =2 である場合

(3)　結果の要約

表 2 では、$\triangle_{aa2}$ をとりあげて、サーティの誤差モデルにおける重みの存在の有無に注目して、a 値の変化の影響を調べた。表 2 の結果からは、a=2 の場合のみ、$\varepsilon_{ij}=1,2$ のとき重みの存在がみられた。表 3 では、$\triangle_{222}$ をとりあげて、表 2 と同様に、サーティの誤差モデルにおけるの重みの存在の有無に注目して、誤差 ε_{ij} の大きさに対する変化の影響を調べた。表 3 の結果からは、ε_{ij} =1,2 のとき重みの存在がみられた。また、ε_{12} =1/2、ε_{23} =2、ε_{31} =1/2（ε_{12} =2、ε_{23} =1/2、ε_{31} =1/2）のとき、重みの存在がみられた。表 4 では、$\triangle_{333}$ をとりあげて、表 2、3 と同様にして、誤差 ε_{ij} の大きさに対する変化の影響を調べた。表 4 の結果は、ε_{ij} =2 のとき重みの存在がみられた。また、表 3 と同様な結果が得られて、ε_{12} =1/2、ε_{23} =2、ε_{31} =1/2（ε_{12} =2、ε_{23} =1/2、ε_{31} =1/2）のとき、重みの存在がみられた。表 5 では、$\triangle_{444}$ をとりあげて、表 2、3、4 と同様にして、誤差 ε_{ij} の大きさに対する変化の影響を調べた。表 4 の結果は、ε_{ij} のいずれの大きさに対しても、重みの存在がみられなかった。

7. おわりに

AHP では、比較項目の重要度（重み）の推定において、一対比較値行列を構成する評点の信頼度が大きな影響を与えることになる。とくに、一対比較値行列が巡回有向であるとき、重みの推定性能は悪いとされ、通常に適用されているサーティの誤差モデルに基づく推定結果は信憑性を得ることはできない。本稿では、比較項目数を 3 に限定して、項目間の比較において得られる一対比較値行列が巡回有向である場合に注目して、サーティの誤差モデルの守備範囲を探ることを試みた。すべての巡回有向の一対比較値行列に対して、サーティの C.I. 基準によれば経験則である整合性基準（C.I.=0.1, あるいは C.I. = 0.15）を満たさないことになるが、サーティの誤差モデルの緩和を意図して誤差の大きさに着目する。設計された数値例をとりあげて重みの存在の有無を調べることで、巡回有向である一対比較値行列がサーティの誤差モデルにおいて存在するか（意味を有するか）否かを考察・吟味した。評点がすべて 2、あるいはすべて 3 である一対比較値行列では、誤差の大きさが 2 をとる場合、サーティの誤差モデルにおける重みの存在が見られる。評点がすべて 4 以上の場合、誤差の大きさが 2 である場合も重みが存在しないことは、本稿の数値実験での評価基準の 1 つである緩和な整合性基準（k=3）を考慮するとき、興味深い。このことは、一対比較値行列（3 × 3）が巡回有向の場合、サーティの誤差モデルのもとで、重みの推定を経て一連の AHP 方式による代替案の選定が可能となる場合を示唆する。

参考文献

(1) Saaty,T.L.(1980).The Analytic Hierarchy Process,McGraw Hill,New YorK.
(2) 田中浩光（2007)。AHP における一対比較値の緩和な整合性指標について、京都大学数理解析研究所講究録 1548、122-129。
(3) 田中浩光（2010a)。AHP におけるサイクルの影響について、愛知学院大学論叢「経営学研究」、第 19 巻、第 3/4 合併号、pp.35-42。
(4) 田中浩光（2010b)。AHP におけるサイクル出現と C.I.、日本経営数学会報告要旨集
(5) 田中浩光（2011)。AHP におけるサイクル出現と評点化過程、京都大学数理解析研究所講究録、1734、pp.54.-61。
(6) 田中浩光（2012)。AHP におけるサイクル出現と誤差モデル、日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集。
(7) 田中浩光（2014a)。一対比較値行列（3 × 3）におけるサイクル出現と緩和な整合性指標、愛知学院大学経営管理研究所紀要、第 21 号、pp.21.-27。
(8) 田中浩光（2014b)。一対比較値行列（3 × 3）における緩和な整合性指標とサーティの誤差モデル、愛知学院大学論叢「経営学研究」、第 21 巻、第 2 号、pp.1.-8.
(9) 田中浩光（2015a)。一対比較値行列（3 × 3）とサーティの誤差モデル、日本Ｏ Ｒ学会 2015 年秋季研究発表会アブストラクト
(10) 田中浩光（2015b)。一対比較値行列（3 × 3）とサーティの誤差モデルの有効性について、愛知学院大学経営管理研究所紀要、第 22 号、pp.31.-40。