〈論　文〉

# 二部門世代重複モデルにおける黄金律の条件：図による再考

柳原　光芳[*)]・篠崎　　剛[**)]

**概要**　本論文は，二部門世代重複モデルにおいて，資本水準が黄金律にある時の条件の意味について再考を行うことを目的とする。その際，図を用いることで，(i) 資本財生産部門の限界生産性が人口成長率に等しくなる黄金律の状況では，消費可能量が最大になること，および (ii) 黄金律から離れた領域では，資本財生産部門へ投入される資本量を変化させることで，資本財および消費財の生産を，より多くできることが視覚的に明らかにされる。

**JEL**　D61, E00, E22

**キーワード**　二部門世代重複モデル，黄金律，動学的（非）効率性，資本蓄積，資本財，消費財

**謝辞**　本論文を執筆する機会を与えてくださった多和田眞先生には，心より感謝の意を表したいと思います。とりわけ，本論文の執筆と並行し，多和田先生と別の論文を執筆する際にも，黄金律の議論を深めさせていただけたことは，何かのご縁を感じるとともに，今後の我々の研究を導いていただけたものと，たいへん感謝申し上げております。

## １．はじめに

本論文は，Galor (1992) の二部門世代重複モデルにおいて，資本水準が黄金律にある時の条件の意味について再考することを目的とする。

動学マクロ経済のモデルにおいて，黄金律（golden rule），あるいは動学的効率性（dynamic

---

*)　名古屋大学大学院経済学研究科

**) 東北学院大学経済学部

efficiency）を考えることは，比較静学分析を行う際に非常に重要である。この黄金律とは，経済における資本水準が長期的に一定となる定常状態において，消費可能な財の量が最大になる資本水準のことをいう。また，この黄金律水準よりも低い資本水準のとき，動学的に効率的であるといわれる。これは，生産が一人当たり資本に関して限界生産性が逓減する場合には，資本を増加させるにしたがって，その増加の大きさよりも生産量の増加の大きさが上回ることで，消費可能量が増加するためである。逆に，この黄金律水準よりも高い資本水準のときには，資本を減少させるにしたがって，逆に生産量が増加し，消費可能量がむしろ増加することから，動学的に非効率的であるといわれる。

Ramsey (1928) に代表される，最適化を行う経済主体が無限期間にわたり存在する枠組み（infinite horizon model）では，完全競争市場の下では，外部性等がない限り資本（貯蓄）の蓄積は過剰なものとはならず，定常均衡は修正された黄金律（modified golden rule）を達成するため，動学的効率性を満たすことになる。それに対して，Diamond (1965) を基礎とするような，（一部門）世代重複（overlapping generations: OLG）モデルでは，経済自体は無限期間にわたり存在するものの，最適化を行う経済主体は有限期間，特に多くの場合には二期間しか存在しないことにより，定常均衡は動学的効率性を満たすかどうかわからない。より具体的には，家計は自身が存在する期間のみの最適化を考えるに留まり，その先，ひいては定常状態まで考えて行動しない。すなわち，たとえ完全競争市場下で，かつ，家計が行う貯蓄が自身にとっては短期的な観点から「最適」であったとしても，貯蓄が蓄積されることで長期的に達成される，経済の定常状態における資本水準は「最適」なもの，つまり黄金律を達成することは保証されず，過大蓄積，あるいは過小蓄積となる可能性が高い。

このように，OLG モデルでは，通常は資本水準が黄金律を達成しないことから，政府による市場介入の余地が生まれることになる。その際，主として二つの方法について検討される。一つは政府が政策変数を（微少量）変化させることで定常状態にどのような影響が与えられるかについて見る比較静学と，もう一つは政府（あるいは社会計画者）がその経済で最も高い経済厚生を達成するように政策変数を決定する社会最適を考える方法である。

前者の比較静学を考える際には，資本水準が黄金律水準よりも低い，動学的効率性を満たすものと仮定される。これは上でも述べたように，動学的に非効率的であれば，資本水準を「低くする」ことで消費可能量がむしろ増加するので，その無駄な資本を単に消費に回すことだけで経済厚生も上昇させることができ，特に政策を考える必要が求められないためである。この点を最初に指摘したものの一つとして Atkinson and Sandmo (1980) がある。そこでは，資本蓄積を抑制する方向に働く資本所得税が，動学的非効率性の下では資本の過剰蓄積を解消するため経済厚生を改善することを示した。

また，後者の社会最適を考える際には，まず社会にとって消費可能量を最大にし，そのうえで個人間の消費配分を考えることで社会厚生の最大化が図られる。この消費可能量の最大化から導かれる条件が，資本が黄金律水準にあることである。OLG モデルにおいては，例えば

Samuelson (1975)，Ono (2003) や Michel and Pestieau (2002, 2013) などのように，さまざまな課税の下，年金制度をどのような形にするかについて，黄金律との関係から導こうとするものが多く存在する[1]。

以上の二つの方法いずれにおいても，黄金律を考えることは，特に OLG モデルでは重要であることが理解できる。このような理由から，消費および資本のいずれにも利用可能な（一種類の）財を，どのような形で資本蓄積を行っていくべきかを考える，あるいはそのために政府がとるべき政策を考える研究が，これまで数多く存在している。

それに対して，経済に消費可能な財と，資本蓄積のために利用可能な財をそれぞれ別に考え，二つの生産部門を想定した OLG モデルにおける黄金律そのものの議論については，これまでほとんどなされてきていない。その唯一の例外は Cremers (2006) である。この Cremers (2006) は，二部門 OLG モデルを最初に精緻な形で議論を行った Galor (1992) において触れられていなかった黄金律の問題について扱っている。具体的には，社会最適を目的とする社会計画者を考え，二部門 OLG モデルにおける黄金律では，資本財生産部門における労働者一人当たりの資本の限界生産性が，人口成長率と資本減耗率の和に等しくなることを示した上で，二つの異なる世代間の消費配分に関する最適条件を示している。特に前者については，一部門 OLG モデルでは一人当たり「総」資本が黄金律の条件に関係していたのに対し，この二部門 OLG モデルでは一人当たり「総」資本ではなく，「資本財生産部門」における労働者一人当たり資本が関係することを示した点について，重要な意味を有していると言える。

一部門 OLG モデルと同様に，この二部門 OLG モデルにおいて，黄金律あるいは動学的効率性との関係で，課税による最適化を扱うものがある。例えば，Fedotenkov (2019) では，動学的非効率性の下では資本財部門に課税することが最適であることを示している。さらには，生産部門が二部門あることを活かし，貿易理論に応用した Kemp and Wong (1995) や Serra (1991) などもある。これらでは，いわゆる静学的な貿易利益に加えて，資本蓄積による効果，すなわち黄金律効果が貿易によって引き起こされることを指摘している。

これらのように，二部門 OLG モデルと黄金律との関連についての研究は散見されるものの，そもそも黄金律の下で経済がどのような状況となっているかについて，詳細な説明を試みたものはない。先の Cremers (2006) であっても，二部門 OLG モデルにおける黄金律の条件を明示しているものの，それが有する意味については簡単に触れられているのみで，その意味に対する十分な検討がなされているとはいえない。また，資本財生産部門の資本水準が黄金律から離れている場合には，どのような状況となっているかについては説明が加えられていない。

そこで，本論文では，Cremers (2006) の議論をより詳細に進めることで，二部門 OLG モデルにおける黄金律が持つ意味についてより明らかにすることを目的とする。また，資本財生産

1）このような議論は，閉鎖経済モデルだけでなく，二国が存在する形の開放経済モデルにおいてもなされている。例えば，Hamada, Kaneko and Yanagihara (2017) では，年金制度のある下で，二国間において経済援助（所得移転）が行われた場合に，経済厚生にどのような影響があるかについて分析している。

部門の資本水準が黄金律から離れている場合に，資本蓄積を進めることが望ましいことを，簡単な図を用いることで直感的に説明を加える。これらにより，一部門 OLG モデルとは異なる含意が二部門 OLG モデルの中に認められることが明らかにされる。

本論文は以下のように構成される。まず２節は，二部門 OLG モデルの市場経済での枠組みを描写する。３節では二部門 OLG モデルにおける黄金律を，Cremers (2006) を踏まえてまず示し，さらにその意味について考え，より直感的な理解を促すために図示を試みる。４節は本論文をまとめる。

## ２．市場経済

ここでは，本論文で用いられる，Galor (1992) の二部門世代重複モデルにおいて想定されている経済環境について説明する。まず，市場経済の枠組みについて概観する。

### ２．１　経済環境

経済活動は離散的な時間の下で，第１期から無限先の将来までにおいてなされる。経済に存在する個人は同質であり，また必ず二期間生きるものとする。第 $t$ 期に生まれた個人を第 $t$ 世代と呼び，この個人は第 $t$ 期を若者として，また第 $t+1$ 期を老人として生きる。第 $t$ 世代の人口を $L_t$ と表し，人口成長率が $n \equiv \left(L_{t+1} - L_t\right)/L_t$ と一定率で与えられているものとする。

### ２．２　個人

経済の第１期には老人である前世代が初期の資本 $K_1$ を保有し，そのリターンで消費を行う。一方，若者である第１世代は自らの初期保有である時間（ここでは１と基準化する）を非弾力的に労働として生産部門に投入し，賃金を得る。第１世代はその賃金の一部を第１期である若年期の消費にあて，残りを第２期である老年期の消費にあてるべく，貯蓄を行う。その貯蓄は第２期においては資本 $K_2$ として生産に投入されるとともに，第２世代により労働も投入されることで，生産活動が行われる。

以後，各期においてこのような形で各世代が経済活動を行っていく。すなわち，第 $t$ 世代は若年期において労働から $w_t$ を得て，それを当期の消費，$c_t^1$, と貯蓄，$s_t$，に充てる。老年期には，貯蓄の元本にその利子を加えた $r_{t+1}$ からなるリターンを得て，その期の消費，$c_{t+1}^2$, を行う。

以上をまとめると，第 $t$ 世代の若年期および老年期の予算制約は，それぞれ以下の通りとなる。

$$p_t c_t^1 = w_t - s_t, \tag{1}$$

$$p_{t+1} c_{t+1}^2 = r_{t+1} s_t. \tag{2}$$

ここで$p_t$および$p_{t+1}$はそれぞれ第 $t$ 期および第 $t+1$ 期の資本財に対する消費財の相対価格（以下,「消費財価格」と呼ぶ）を表す。

これらの予算制約の下，第 $t$ 世代は自身の効用

$$U_t = U(c_t^1, c_{t+1}^2) \tag{3}$$

を最大化する。ここで (3) で与えられる効用関数は，二階の連続微分可能で，強い意味での凹関数の性質を有し，$c_t^1$ および $c_{t+1}^2$ に関して増加関数であるものとする。効用最大化より，以下の消費関数および貯蓄関数が得られる。

$$c_t^1 = c^1(w_t, p_t, r_{t+1}, p_{t+1}), \tag{4}$$

$$c_{t+1}^2 = c^2(w_t, p_t, r_{t+1}, p_{t+1}), \tag{5}$$

$$s_t = s(w_t, p_t, r_{t+1}, p_{t+1}). \tag{6}$$

また，ここで得られた (4) および (5) については，上級財であるものと仮定する。

## ２．３　企業

経済には消費財 $X$ を生産する消費財生産部門と，資本財 $Y$ を生産する資本財生産部門の二部門が存在し，かつ，それぞれの生産部門にある企業によって，各期に両財の生産が必ず行われるものとする。また，$j$ 財生産部門$(j = x, y)$においては労働$L^j$および資本$K^j$をそれぞれ用いて生産が行われる[2)]。

$j$ 財生産部門における（総）生産関数，$F_j(K_j, L_j)$, は，規模に関して収穫一定であるとする。したがって，この生産関数は労働者一人当たりの資本 $k_j \equiv \frac{K_j}{L_j} > 0$ により表される，労働者一人当たりの生産関数，$f_j(k_j)$，として書き換えられる。この労働者一人当たりの生産関数は二階の連続微分可能で，強く凹である正の増加関数，すなわち，$f_j(k_j) > 0$，$f_j{}'(k_j) > 0$ および $f_j''(k_j) < 0$ であるものとし，また，稲田条件，$\lim_{k_j \to 0} f_j{}'(k_j) = \infty$ および $\lim_{k_j \to \infty} f_j{}'(k_j) = 0$ を満たすものとする。

若者により供給される労働は，二つの生産部門によって完全に需要されるため，$L_{j,t}$を第 $t$ 期における $j$ 財生産部門の労働量とすると，$L_t = L_{x,t} + L_{y,t}$ が成立する。また，各生産部門の労働量の総労働に対する割合 $l_{j,t} \equiv L_{j,t}/L_t$ $(0 < l_{j,t} < 1)$ を考えることで，この式は$1 = l_{x,t} + l_{y,t}$と表されることになる。

同様に, 資本も二つの生産部門で完全に需要されるため，$K_{j,t}$を第 $t$ 期における $j$ 財生産部門の資本量とすると，$K_t = K_{x,t} + K_{y,t}$が成立する。さらにこれに $l_{j,t}$ を考えることで,

2）資本減耗率は１であると仮定する。

$$k_{x,t}l_{x,t} + k_{y,t}l_{y,t} = k_t \tag{7}$$

が得られる。この (7) を用いて，かつ，総生産関数が規模に関して収穫一定であることから，各生産部門における第 $t$ 期の労働者一人当たりの生産量を，それぞれ以下のように表すことができる。

$$x_t = \frac{k_t - k_{y,t}}{k_{x,t} - k_{y,t}} f_x(k_{x,t}), \tag{8}$$

$$y_t = \frac{k_{x,t} - k_t}{k_{x,t} - k_{y,t}} f_y(k_{y,t}). \tag{9}$$

このように，労働者一人当たりの消費財および資本財生産量は，$k_t$，$k_{x,t}$ および $k_{y,t}$ に依存した形で表すことができることがわかる。

資本と労働はいずれも，二つの生産部門間を自由に移動可能であるものとする。これにより，無裁定条件が成立し，両生産部門での利子率および賃金が均等化することになる。具体的には，二つの生産部門における企業の利潤最大化条件から，要素価格均等化が以下のように成立する。

$$r_t = p_t f_x{}'(k_{x,t}) = f_y{}'(k_{y,t}) \tag{10}$$

$$w_t = p_t\left[f_x(k_{x,t}) - f_x{}'(k_{x,t})k_{x,t}\right] = f_y(k_{y,t}) - f_y{}'(k_{y,t})k_{y,t} \tag{11}$$

(10) で (11) を除することで，賃金・レンタル比率$\omega_t \equiv w_t/r_t$ は$\omega_t = \omega(k_{j,t})$，$\frac{d\omega_t}{dk_{j,t}} > 0$ となることが確認できる。この逆関数をとることで，$k_{j,t} = k_j(\omega_t)$ が得られる。ここで$k_y(\omega_t) > k_x(\omega_t)$であれば，$y$ 財（資本財）生産部門が $x$ 財（消費財）生産部門より相対的に資本集約的であり，逆に$k_y(\omega_t) < k_x(\omega_t)$であれば，$y$ 財（資本財）生産部門が $x$ 財（消費財）生産部門より相対的に労働集約的であるといえる。

ここで再度（10）を用いて，第 $t$ 期の消費財価格$p_t$も，

$$p_t = p(\omega_t) \equiv \frac{f_y{}'(k_y[\omega_t])}{f_x{}'(k_x[\omega_t])} \tag{12}$$

と，$\omega_t$の関数となることがわかる。さらに，この (12) を (10) および (11) に代入することで，$w_t = w(p_t)$および$r_t = r(p_t)$と，要素価格も消費財価格の関数となることがわかる。したがって，(8) および (9) の各生産部門の生産関数は，

$$x_t = x(k_t, p_t), \tag{13}$$

$$y_t = y(k_t, p_t) \tag{14}$$

と，一人あたりの資本および消費財価格の関数で表わされることになる。

### ２.４　動学均衡および定常均衡

家計が行う貯蓄は，資本財を購入することで行われる。そのため，この経済における資本財市場の需給均衡は

$$y(k_t, p_t) = s(w_t, p_t, r_{t+1}, p_{t+1}) = s(w(p_t), p_t, r(p_{t+1}), p_{t+1}) \tag{15}$$

として表すことができる。また，購入された資本財が資本を蓄積することに貢献することから，資本の動学式が

$$k_{t+1} = \frac{y(k_t, p_t)}{n} \tag{16}$$

として表されることになる。これら (15) および (16) の二本の式が，第 t 期における経済の均衡を表している。ただし，ここではワルラスの法則により，消費財市場均衡も成立していることが保証されている。したがって，この経済における通時的な動学均衡は，初期の $k_1$ と $p_1$を所与とし，各期の (15) および (16) によって描写されることになる。

最後に，定常状態においてはすべての変数が変化しなくなるため，定常均衡は上の (15) および (16) において$k_t = k_{t+1} = k^*$および$p_t = p_{t+1} = p^*$とした次の二本の式

$$y(k^*, p^*) = s(k^*, p^*), \tag{17}$$

$$k^* = \frac{y(k^*, p^*)}{n} \tag{18}$$

で描写されることになる。

以上のように，市場経済においては，一人当たり資本が与えられた下で消費財価格を介することにより，個人と企業との間で資本および労働の需給が決定されるとともに，消費財および資本財の需給が決定される。それにより，次期の一人当たり資本と消費財価格が決定される。このような過程を毎期繰り返すことで，経済の定常状態が達成されることになる。

ただし，このように達成される定常状態における資本ストックは，経済厚生の観点から望ましいものとなるとは限らない。その理由は先にも述べたように，個人の存在が二期間のみに限られるところにある。そこで，次節では定常状態における経済厚生が最大化されるために必要となる黄金律の条件を求める。

## ３．黄金律

本節では，上で扱った経済環境を考えつつ，市場経済ではなく，社会計画者により経済における（総）消費可能量が最大になる条件を求める。上でも述べたように，この条件は経済厚生を最大にする必要条件である。ただし，本論文では消費配分の問題に触れる経済厚生最大化については議論をせず，消費可能量最大化条件である黄金律の描写のみに焦点をあてることとす

る。なお，本節で期を表す下付き文字がついていない変数は，前節のアスタリスク（*）が付された変数と同様に，定常状態を意味しているものとする。

### ３．１　黄金律の条件

まず，黄金律の条件を求めるため，以下の社会計画者による最適化問題を考える。この問題はすでに Cremers (2006) でも定式化されているため，それに従う。社会計画者は定常状態における経済全体の消費可能量の最大化を図る。すなわち，$x = l_x f_x(k_x)$を最大化する。その際，直面する制約としては労働配分，資本配分と定常状態における資本の動学式である。具体的には，これらはそれぞれ，

$$1 = l_x + l_y, \tag{19}$$

$$k_x l_x + k_y l_y = k, \tag{20}$$

$$nk = l_y f_y\left(k_y\right) \tag{21}$$

として与えられる。その最大化問題を解くことにより，Cremers (2006) と同様，一つの条件として

$$\frac{f_x - k_x f_x{}'}{f_x{}'} = \frac{f_y - k_y f_y{}'}{f_y{}'} \tag{22}$$

が得られる。

この条件については，Cremers (2006) では説明が加えられていないが，これを解釈するに当たり，市場均衡における条件と対照させることは有益である。これはそれぞれの辺の分母が資本の限界生産性を，分子が労働の限界生産性を表していることから，労働・資本生産性比率と呼ぶべきものである。(10) および (11) で見たように，この (22) は二つの生産部門間における賃金・レンタル比率$\omega$の均等と同様の意味を表している。市場経済においてはこの式は無裁定条件から成立すべきものである一方，ここでの消費可能量最大化においては，それが条件として求められている。また，市場均衡における賃金・レンタル比率の均等化という条件からもわかるように，消費可能量最大化においては，生産に対する労働投入と資本投入による貢献，すなわち生産性の比が，二部門において均等化される必要があるということをこの (22) 式は表している。

これに加えて，消費可能量最大化を解くことで得られるもう一つの条件は，以下のものである。

$$f_y{}' = n. \tag{23}$$

これは Cremers (2006) で初めて指摘された，一部門 OLG モデルに対照する形で示された二部

門 OLG モデルにおける黄金律を示す式である。この式の意味するところは非常に重要である。すなわち，ここでは黄金律の達成のためには$y$財（資本財）生産部門における労働者一人当たりの資本による限界生産性が人口成長率と等しいということを示している[3)]。一部門 OLG モデルではもちろん財が一種類しかないこともあり，経済の（一人当たりの）資本の限界生産性が人口成長率と等しいという条件が求められたが，この二部門 OLG モデルでは，$y$財（資本財）生産部門における労働者一人当たりの資本による限界生産性のみが問題となることが示されている。

このように，Cremers (2006) では，二部門 OLG モデルにおける黄金律の条件を求めたという意味で非常に大きな貢献が認められていたものの，それが含む意味というものについてはほとんど触れられていなかった。そのため，黄金律においてどのような状況が達成されているか(達成されるべきか)ということがあまり明確ではなかった。ここではそれに解釈を加えることで，黄金律が求める条件がより明確になったものと考えられる。

### ３．２　図示

最後に，黄金律の状況で達成される状況について図示する。

まず，図では，横軸に労働者一人当たりの資本が，縦軸に労働･資本生産性比率がとられ，その平面上に$x$財（消費財）生産部門と$y$財（資本財）生産部門の労働・資本生産性比率がそれぞれ点線と細線の曲線で表されている。ここで，労働・資本生産性比率は労働者一人当たりの資本に関して増加関数となっている，すなわち，

$$\frac{d\dfrac{f_j - k_j f_j'}{f_j'}}{dk_j} = -\frac{f_j f_j''}{\left(f_j'\right)^2} > 0 \tag{24}$$

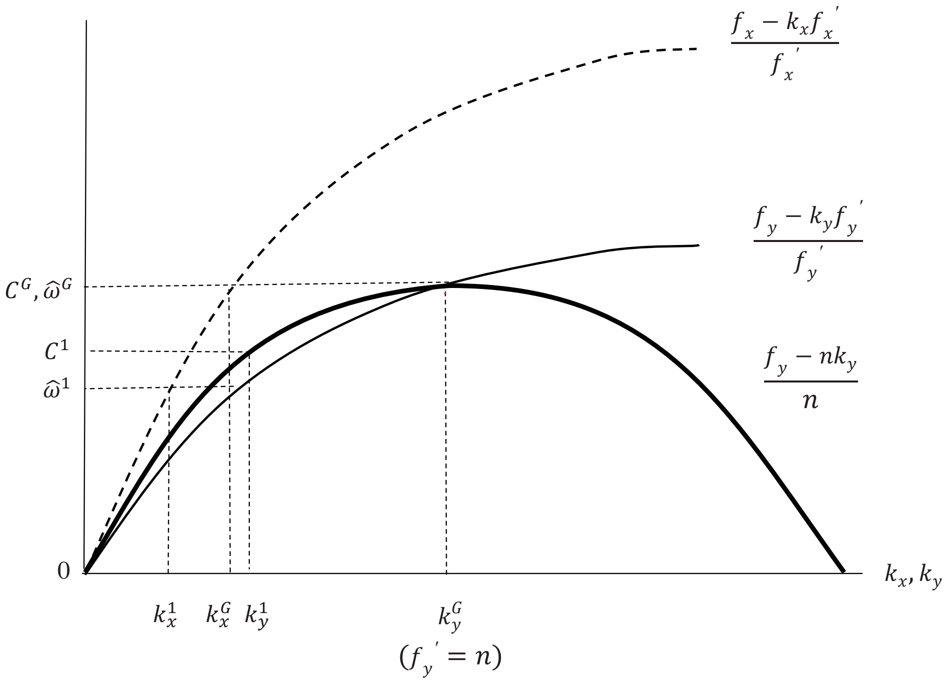
であることから，これらの曲線はいずれも右上がりであることがわかる[4)]。またここでは，$x$財生産部門が$y$財生産部門よりも労働集約的であると仮定しているため，$x$財（消費財）生産部門の労働・資本生産性比率を表す点線の曲線が$y$財（資本財）生産部門の労働・資本生産性比率を表す細線の曲線よりも常に上に位置しているように描かれている。

これらの曲線に加えて，図の上には$y$財（資本財）生産部門の労働・資本生産性比率で，資本の限界生産性が人口成長率に等しい場合の値，$\frac{f_y - nk_y}{n}$が山型の太線が描かれている。この太

3）Cremers (2006) では，資本の減耗率を想定しているため，資本財生産部門における労働者一人当たり資本の限界生産性と，人口成長率と資本減耗率の和が均等となることが示されている。本論文では議論の簡単化のため，資本は生産により完全に減耗するものと仮定した。

4）ここでは$\frac{d^2\frac{f_j - k_j f_j'}{f_j'}}{(dk_j)^2} = \frac{1}{\left(f_j'\right)^3}\left[-\left(f_j'\right)^2 f_j'' - f f_j' f_j'' + 2f(f_j'')^2\right] < 0$を仮定し，労働・資本生産性比率が労働者一人当たりの資本に関して凹になっているように図示している。しかし，ここでは増加関数であることのみが重要であり，必ずしも凹の形状を考える必要はない。

**労働・資本生産性比率**




線は，$f_y{}' = n$が成立する$k_y^G$のときに頂点となるように描かれており，後に説明をするように，消費財生産部門に投入される「人口一人当たり」の資本量を表している。また，横軸において$k_y$が$k_y^G$より小さい領域は動学的に効率的な状況であり，逆に大きい領域は動学的に非効率な状況にある。

この経済では，(22) と (23) が同時に成立することが，消費可能量が最大となる黄金律となるための必要条件となっている。これらを同時に満たす点は図の上では，$(k_y^G, \widehat{\omega}^G)$で表されている。そこで以下，それぞれの条件の成立について便宜的に順に見ていく。

まず，労働・資本生産性比率均等化を表す (22) の条件について見ていく。たとえば，$y$財生産部門における労働者一人当たりの資本が定常状態で$k_y^1$であったとする。そのとき，両生産部門における労働・資本生産性比率が等しくなる必要があることから，$k_y^1$のときに細い曲線が縦軸上にとる値である$\widehat{\omega}^1$と同じ高さの点線上の点で，$x$財生産部門における労働・資本生産性比率の大きさとならなければならない。そのためには，$x$財生産部門の労働者一人当たりの資本が$k_y^1$となる必要がある。次に，この条件に加えて，二部門 OLG モデルにおける黄金律を示す (23) の条件について見る。これは，$k_y^1$の値が，$f_y{}' = n$ がを満たす$k_y^G$でなければならないことを示している。したがって，これら二つの条件を満たす点は，図の上では，$k_y^G$から垂直に伸びた点で表された直線と，$\frac{f_y - k_y f_y'}{f_y'}$ が表された細い曲線との交点である $(k_y^G, \widehat{\omega}^G)$ となることが理解

できる。

そこで，この図において $(k_y^G, \widehat{\omega}^G)$ で消費可能量が最大になる理由について説明を加える。まず，一部門 OLG モデルでは経済の均衡を考えるのに，一財しか存在しないため，一つの資源制約のみに注目をすればよいものの，この二部門 OLG モデルでは，上で見た (19) の労働配分，(20) の資本配分と (21) の定常状態における資本の動学式の 3 つの制約を考える必要がある。本論文では Cremers (2006) 同様に労働配分についての議論は行わず，$l_x$，$l_y$ を一定のものとして扱い，資本配分についての議論にのみ焦点をあてる。そこで，これらのうち，まず (20) と (21) より，以下の式が成立する。

$$l_y f_y\left(k_y\right) = n\left(k_x l_x + k_y l_y\right). \tag{25}$$

これを変形することで，

$$k_x l_x = l_y \frac{f_y\left(k_y\right) - n k_y}{n}. \tag{26}$$

が得られる。この左辺は $x$ 財生産部門の資本量を表している。また，$x$ 財の生産関数 $x = l_x f_x(k_x)$ より，資本量を最大化することが生産の最大化と同値であることは明らかである。したがって，この右辺を最大化することで，左辺の最大化，つまり $x$ 財の生産量の最大化となることが理解できる。実際，$l_x$，$l_y$ が一定の下で，$k_y$について $k_x l_x$ の最大化を行うと，(23) の黄金律の条件が直接得られることがわかる。

この，(26) の右辺にある $\frac{f_y - n k_y}{n}$ を図示したものが山型の太線である。すなわち，この山型の太線から横軸までの距離$C^G$は，$k_y$に対応した $x$ 財生産に使用される資本量を表している。したがって，ひいては $x$ 財の生産量，つまり消費可能量に対応していることがわかる。そのため，$k_y^G$ のときにこの $x$ 財の生産量が最大になっていることが図の上からわかる。

一方，$y$ 財生産部門の労働者一人当たりの資本が$k_y^G$と等しくないときに，なぜ消費可能量が最大にならないのかについて，以下，説明を加える。ここでは $y$ 財生産部門の労働者一人当たりの資本が $k_y^G$より低い $k_y^1$のときについて考える。この $k_y^1$のときの消費財生産部門に投入される「人口一人当たり」の資本の量は，太線の位置に対応する$C^1$となっている。図より，この$C^1$は$C^G$よりも低いことが読み取れるため，$k_y$の蓄積をより高めることで消費可能量もより大きくなることがわかる。つまり，資本蓄積をより促進させるべき状況であると言え，これが二部門 OLG モデルにおける動学的効率性の意味である。

また，このときには $x$ 財生産部門の労働・資本生産性比率も，$y$ 財生産部門の労働・資本生産性比率と等しくなっている必要があることから，$x$ 財生産部門の資本水準についても同様のことが成立していることがわかる。すなわち，$x$ 財生産部門においても同様に資本蓄積をより促進させるべきであることがわかる。

このような黄金律以外の資本量となるのは，市場経済において競争的に均衡が達成される場合において見られる。先にも述べたように，市場経済においては個人は二期間しか存在しないため，長期的な状況，より具体的に言えば定常状態において達成される $y$ 財生産部門の労働者一人当たりの資本水準についてはまったく考慮しない。そのため，このように黄金律が達成される状況とならないことが起こりうる。

## 4.　おわりに

本論文では，Galor (1992) の二部門 OLG モデルにおける黄金律について，Cremers (2006) の議論を敷衍する形で，その意味について再考を行った。

本論文では，特に図を用いた説明により，以下の二点が示された。まず，黄金律においては資本財生産部門の限界生産性が人口成長率に等しくなる状況では，利用可能な $x$ 財の量が最大になることが図の上からも明らかになった。これは，一部門 OLG モデルにおいて黄金律の資本量においては，消費可能量が最大になるという事実と対応している。次に，黄金律から離れたところでは，資本財生産部門へ投入される資本量を変化させることで，資本財の生産についても，また同時に消費財の生産についても，より多くすることができる余地があることが示された。これについても，一部門 OLG モデルでの動学的効率性の議論が，二部門 OLG モデルにおいても成立していることが明らかになった。ただし，その動学的な効率性を決定づけるものは，あくまで資本財生産部門における労働者一人当たりの資本であることは，二部門 OLG モデルにおける特徴である。

このように，二部門 OLG モデルにおける政策効果を考えるときにも，一部門 OLG モデルにおける議論と対照可能であることが理解できる。そのため，政策効果はいずれのモデルにおいても定性的には変わらないものと考えられるかもしれない。しかし，二部門 OLG モデルにおいては，異なる生産部門が存在していることから，それぞれに対する個別の政策を考えることができ，より現実的な観点から政策効果について検討できる。したがって，今後，一部門 OLG モデルにおいて議論をされてきた問題を，二部門 OLG モデルにおいても再考を行うことも必要であると考えられる。

## 参考文献

Atkinson, A. B. and Sandmo, A. (1980). Welfare implications of the taxation of savings. *The Economic Journal*, 90 (359), 529-549.

Cremers, E. T. (2006). Dynamic efficiency in the two-sector overlapping generations model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30(11), 1915-1936.

Diamond, P. (1965). National debt in a neoclassical growth model. *American Economic Review*. 55(5), 1126-1150.

Fedotenkov, I. (2019). Optimal asymmetric sector-specific labour taxation in an overlapping generations model. *Journal of Economics*, 127(1), 1-18.

Galor, O. (1992). A two-sector overlapping generations model: a global characterization of the dynamical system. *Econometrica*, 60 (6), 1351-1386.

Hamada, K., Kaneko, A. and Yanagihara, M. (2017). The transfer paradox in a pay-as-you-go pension system. *International Economics and Economic Policy* 14, 221-238.

Kemp, M. C. and Wong, K. Y. (1995). Gains from trade with overlapping generations. *Economic Theory*, 6(2), 283-303.

Michel, P. and Pestieau, P. (2002). Optimal taxation of capital and labor income with social security and variable retirement age. *FinanzArchiv/Public Finance Analysis*, 59(2) 163-176.

Michel, P. and Pestieau, P. (2013). Social security and early retirement in an overlapping-generations growth model. *Annals of Economics and Finance*, 14(2 (B)), 705-719.

Ono, T. (2003). Social security policy with public debt in an aging economy. *Journal of Population Economics*, 16(2), 363-387.

Ramsey, F. P. (1928). A mathematical theory of saving. *Economic Journal*, 38 (152), 543-559.

Samuelson, P. A. (1975). Optimum social security in a life-cycle growth model. *International Economic Review*, 16(3), 539-544.

Serra, P. (1991). Short-run and long-run welfare implications of free trade. *Canadian Journal of Economics*, 24(1) 21-33.