一対比較値行列(3×3)におけるサイクル出現と緩和な整合性指標

A Note on the Appearance of Cycles and a Consistency Index with Relaxation in Pairwise Comparison Value Matrices(3×3)

田　中　浩　光
Hiromitsu TANAKA

和文要旨：

要旨　一対比較値行列の信頼性は評点付けに大きく依存する。本稿では、比較項目数3の一対比較値行列値に限定して、田中 (2007b) に提示された、サイクル出現における緩和な整合性指標の適用可能性を検討する。数値的評価では、サーティの誤差モデルに基づき、サーティの整合性指標C.I. を対照とする。

英文要旨：

Abstract　The confidentiality of pairwise comparison value matrix depend on the scoring process in AHP. In this paper ,we have pairwise comparison value matrices with the size of 3. We consider and investigate the availability of the relaxant consistency index proposed by Tanaka(2007b) for the appearance of cycles. Based on Saaty' s error' s model,we utilize Saaty' s C.I. as the control of the relaxant consistency index.

和文キーワード：一対比較値行列 (3 × 3)、サイクル、サーティの整合性指標 C.I.、サーティの誤差モデル

英文キーワード：pairwise comparison value matrix(3 × 3)、cycles、Saaty' s consisitency index、Saaty's error's model

1．はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) 方式では、比較項目の重要度の推定性能を確保するために一対比較値の信頼性の確認が重要である。一対比較値の評点付け（scoring）においては、評点化の際に生じる評価者固有のバラツキに加え、評点数が少なく、そして離散化などAHP方式に依拠する偏りが含まれることに注意が要る。通常、一対比較値集合（一対比較値行列全体も含む）に対して信頼性を診る点検として、サーティの整合性指標C.I.（Consistency Index）が適用される。C.Iは、方向性を持たない包括的指標であることが知られているため、AHP方式が抱える評点の値域としての上限（評点9が最大値）、離散化（整数値）の制限が強いため奇異な一対比較値行列を生成することがある（田中（2007b））。また、AHP方式で用いられる代替案のみでは比較の共通土俵が得られない場合に、サイクルの出現の可能性が指摘されている（田中（2011）, 田中（2012b））。本稿では、C.I.の1つの補完的役割を果たすと考えられる､緩和な整合性基準（田中（2007b））を取り上げる。比較項目数が3である一対比較値行列を対象とする。その理由は、項目対比較において推移則が成立する最小単位が3項目で

あることを生かすことにある。田中（2014）は一対比較値行列（3×3）が非巡回有向回路の場合について、緩和な整合性指標がC.I.に比較して良好に作動する状況を見出した。本稿では、サイクルが出現する一対比較値行列（3×3）において、緩和な整合性指標が有効に作動するか否かを、サーティの誤差モデルの下で検討する。本稿では、比較項目数が3である一対比較値行列をとりあげ、緩和な整合性指標の適用可能性について、C.I.を参照にする数値的な吟味を通して考察する。

2．評点化過程と重要度の導入

比較対象の4項目に対する一対比較では、下記の手順（1），（2）を通して、一対比較値行列Aを得る。

$A_4 = \{ a_{ij} \}$

ここに、i,j = 1，・・,4に対し、

$$a_{ij}^{-1} = a_{ji}, \quad a_{ii} = 1 \qquad (1)$$

$$\max(a_{ji}、a_{ij}) \in \{1、・・・、9\} \qquad (2)$$

評点a_{ij}は、逆数対称化（1）、離散化に伴う値域の有界性（2）の縛りを受けることに留意する。

サーティによるAHPでは、次の2つの想定が重要である。

①比較対象の3項目に対し、評価者の有する潜在的な重要度（以下、重み）$W = \{w_i\}$を導入する。

②潜在的な（真の）重み$\{w_i\}$に基づいて、比尺度性の想定もとで項目対の相対評価がなされる。

$$a_{ij} \fallingdotseq (w_i \,/\, w_j) \qquad (3)$$

一対比較値の評点化過程を図1に示す（田中（2007b）など）。

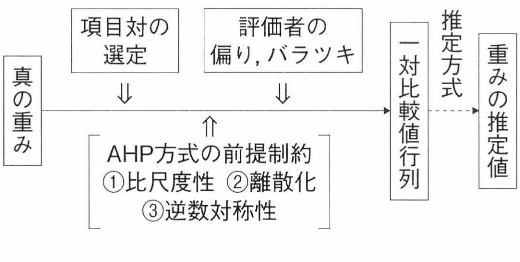


図1　AHPにおける一対比較での評点化過程

3．サーティの整合性指標C.I.

図1に基づき、一対比較値の生成について考える。誤差モデル（4）は重要度（以降、重み）Wを変量ではなく母数として扱うことに留意する。すなわち、重み$W = \{w_i\}$は、評価者固有の固定値であり、一対比較の実施に対し不変とする。

本報告では、評点a_{ij}に対して、誤差モデル（4）を想定する。

$$a_{ij} = (w_i \,/\, w_j) \cdot \varepsilon_{ij} \qquad (4)$$

ここに、$E = \{\varepsilon_{ij}\}$はAHP方式に付随する制約（離散化など）の調整を含む誤差を表す。

重みの推定は、Saatyの固有値法で得られるのが通常である。

〔固有値法〕

$$AU_{max} = \lambda_{max} \cdot U_{max} \qquad (5)$$

ここに、λ_{max}：Aの最大固有値、U_{max}：λ_{max}に対応する主固有ベクトル、$U_{max} = \{u_i\}$。

u_iを第i項目の重みとする。固有値法で求められたu_iを重みw_iの推定値と考えることができる。

一対比較値の整合性の点検には、サーティの整合性指標C.I.（Consistency Index）が用いられる。

$$C.I. = (\lambda_{max} - 3)/(3-1) \qquad (6)$$

$$\lambda_{max} = 3 + \sum\sum (u_i - a_{ij}\,u_j)^2/(a_{ij}\,u_i\,u_j) \qquad (7)$$

相対残差

$$e_{ij} = a_{ij}/(u_i\,/\,u_j) \qquad (8)$$

で表すとき、

$$C.I. = \sum\sum (e_{ij} - 1)/\{2\,{}_nC_2\} \qquad (9)$$

を得る（仁科・柴山（1992）、田中（2007b））。

サーティの経験則によれば、C.I. ≦ 0.1のとき、サーティの意味の整合性が認められるとする。

項目数3のとき、C.I. ≦ 0.1、C.I. ≦ 0.15、の成立は、すなわち$\triangle_{abc}$では、

$$3.78^{-1} \leqq ab/c \leqq 3.78 \qquad (10)$$

$$5.67^{-1} \leqq ab/c \leqq 5.67 \qquad (11)$$

が成立することと同等である（小澤（2004）、田中（2009））。ここに、3項目を①，②、③と表し，①→②、②→③、③→①の順序が成立するとする。3項目の一対比較値行列A_3を巡回有向グラフで考える。a,b,cはそれぞれ①→②、②→③、③→①に対応する評点とする。　以降

では，便宜的に a_{12}、a_{23}、a_{31} の代用として a，b，c を用いて、評点に表される行列を $\triangle_{abc}$ と記す。因に、a_{13} は c^{-1} である。

以下、2つの事実をあげることができる。

「事実1」

比尺度性はサーティの整合性を導く。式（5）から式（6）を得る。

「事実2」

逆数対称性は比尺度性から得られる。

4．サイクル出現と C.I.

本節では、一対比較値行列 $\triangle_{abc}$ がサイクル（巡回有向回路）の出現における C.I. の挙動を調べる。

このとき、主固有値 λ、重みの推定値 $\{u_i\}$、と C.I. は、それぞれ次の通りである。

.

$$\lambda = 1 + (abc)^{1/3} + (abc)^{-1/3}$$

$$C.I. = \{-2 + (abc)^{1/3} + (abc)^{-1/3}\}/2$$

$$u_1 = \{b^{-1}c^{-1} - a(1-\lambda)\}/T、u_2 = (\lambda-2)\lambda/T、u_3 = \{ac - b^{-1}(1-\lambda)\}/T$$
、

ここに、$T = b^{-1}c^{-1-a}(1-\lambda) + (\lambda-2)\lambda + ac - b^{-1}(1-\lambda)$

上記の結果から、事実3と事実4が得られる。

「事実3」

C.I. は非負であり、abc の関数である。abc ≧ 8 のとき、単調増加となる。

「事実4」

a ≧ 2、b ≧ 2、c ≧ 2 のとき、

C.I. ＞ 0.1

ここでは、一対比較値行列のサイクルの出現を考える。一対比較値行列 $\triangle_{abc}$ を有向グラフで表す（図2）。

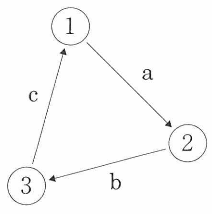


図2　サイクルの出現：$\triangle_{abc}$

以下、田中（2011）にしたがって、一対比較値行列 $\triangle_{abc}$ がサイクル出現するときの C.I. に及ぼす影響を整理する。

(1)　C.I. ≦ α を満足する評点の組（a,b,c）の数　（表1を参照）

(2)　表2.（a,a,c）の C.I.　（表2を参照）

(3)　表3.（a,a,c）の c=2 のとき、重みの推定値　（表3を参照）

(4)　表4.（a,a,a）の C.I.　（表4を参照）

表1　C.I. ≦ α を満足する評点の組（a,b,c）の数（田中（2010a））

c	α＝0.1	（α=0.15）	C.I.>0.15
1	5	10	71
2	1	3	78
3	1	1	80
4	0	1	80
5	0	1	80
6	0	0	81
7	0	0	81
8	0	0	81
9	0	0	81
合計	7	16	713

表1によると、サイクル出現での評点の組のなかで、C.I. 基準で整合性が認められる組数は、すなわち C.I. ≦ 0.15（C.I. ≦ 0.1）を満足する評点の組（a,b,c）の数は全ての 729 組のうち 16 組（7組）と 2.2%（1.0%）と僅かであった。整合性を満足する組の評点は1か2のみの組み合わせであるため、基本サイクルの出現は、サーティの意味で整合性を失うことになる。表1を読むとき、サイクルの影響が大きいことが示唆される。次いで、サイクルの出現に直接影響を及ぼす c の大きさに着目して、サイクル（a,a,c）.（a,a,a）の重みの推定値、C.I. を調べる（表2、表3、表4を参照）.

表2 (a,a,c) のC.I.

c	a=2	a=3
1	0.109	0.280
2	0.25	0.501
3	0.363	0.667
4	0.458	0.802
5	0.541	0.919
6	0.616	1.022
7	0.683	1.116
8	0.745	1.200
9	0.802	1.279

表3 (a,a,c) のc=2のときの重みの推定値

a	u_1	u_2	u_3
1	0.413	0.327	0.260
2	0.333	0.333	0.333
3	0.289	0.331	0.379
4	0.260	0.327	0.413
5	0.238	0.323	0.434
6	0.221	0.319	0.460
7	0.207	0.315	0.478
8	0.196	0.311	0.493
9	0.186	0.307	0.507

表4 (a,a,a) のC.I.

a	C.I.	主固有値
1	0.0	3.0
2	0.25	3.5
3	0.667	4.333
4	1.125	5.25
5	1.6	6.2
6	2.083	7.169
7	2.571	8.143
8	3.063	9.125
9	3.556	10.111

5．サイクル出現と緩和な整合性指標

本節では、田中（2007b）にしたがって、一対比較値行列$\triangle_{abc}$での緩和な整合性指標を与える。

下記の式（12）を満足するとき、

$$\max(a,b,c) \leqq \alpha \tag{12}$$

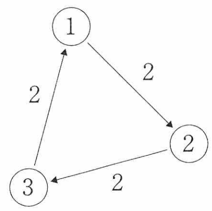
一対比較値行列$\triangle_{abc}$は、水準α以下の緩和な整合性を満足する。ここに、$\alpha \geqq 2$である。

6節での、数値験証では、$\alpha = 2,3,4$の場合をとりあげて考察する

（1） $\alpha=2$の場合

$\max(a,b,c) \leqq 2$

評点集合（a,b,c）の場合の数は、(2,2,2)の1通りである（表6参照)。



（2） $\alpha=3$の場合

$\max(a,b,c) \leqq 3$

評点集合（a,b,c）の場合の数は、(3,2,2)、(2,3,2)、(2,2,3)、・・・,(3,3,3) の7通りである（表7参照)。

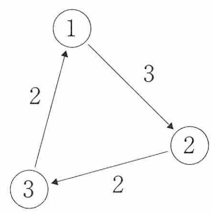


図4 $\alpha=3$の場合：$\triangle_{322}$

（2） $\alpha=4$の場合

$\max(a,b,c) \leqq 4$

評点集合（a,b,c）の場合の数は、(4,2,2)、(2,4,2)、(2,2,4)、・・・,(3,3,4) の12通りである（表8参照)。

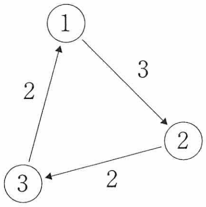


図5　α =4 の場合：$\triangle_{422}$

6．サイクル出現による数値的検討

本節では、3 項目からなる一対比較値行列に対して、緩和な整合性指標を構成する α の値に応じて、重みの推定値、C.I. を算出する。すなわち α の値が 2、3、4 の場合について、すべての評点集合の組み合わせを拾い上げることで、数値的に考察・吟味する。その結果を、表 6、表 7、表 8 に示す。評価においては、誤差モデル（4）で記述できること、そして、誤差 ε_{ij} の大きさが 1/2 以上で 2 未満であることを要請する。

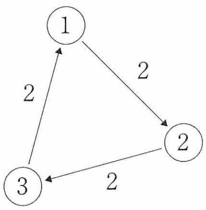
これらの要請を満たせば、緩和な整合性基準を満たすことになる。

（1）　α =2 の場合

max (a,b,c)　≦ 2

例として、(2,2,2) を取り上げる（表 6 参照）。

このとき、次の条件を満たさなければならない。



$1.5 \leqq w_1 / w_2 \ \varepsilon_{12} < 2.5$

$1.5 \leqq w_2 / w_3 \ \varepsilon_{23} < 2.5$

$1.5 \leqq w_1 / w_3 \ \varepsilon_{13} < 2.5$

$0.5 < \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13} < 2$

上記の条件を満たすものとして、

w_1, w_2, w_3　：1/3、1/3、1/3

$\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}$　：3/2、3/2、3/2

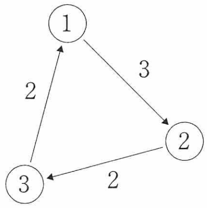
であり、そのときの

C.I. = 0.25

（2）　α =3 の場合

max (a,b,c)　≦ 3

例として、(3,2,2) を取り上げる（表 7 参照）。



このとき、次の条件を満たさなければならない。

$2.5 \leqq w_1 / w_2 \ \varepsilon_{12} < 3.5$

$1.5 \leqq w_2 / w_3 \ \varepsilon_{23} < 2.5$

$1.5 \leqq w_1 / w_3 \ \varepsilon_{13} < 2.5$

$0.5 < \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13} < 2$

上記の条件を満たすものとして、

w_1, w_2, w_3　：8/24、9/24、7/24

$\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}$　：35/18、24/18、24/18

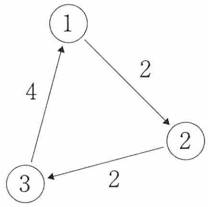
であり、そのときの

C.I. = 0.363

（3）　α =4 の場合

max (a,b,c)　≦ 2

例として、(2,2,2) を取り上げる（表 8 参照）。



このとき、次の条件を満たさなければならない。

$1.5 \leqq w_1 / w_2 \ \varepsilon_{12} < 2.5$

$1.5 \leqq w_2 / w_3 \ \varepsilon_{23} < 2.5$

$3.5 \leqq w_1 / w_3 \ \varepsilon_{13} < 4.5$

$0.5 < \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13} < 2$

上記の条件を満たすものとして、

w_1, w_2, w_3　：5.86/24、7.8/24、10.34/24

ε_{12}、ε_{23}、ε_{13}　：1.99、1.99、1.99

であり、そのときの

C.I. = 0.458

表6　α =2 のとき、重み、誤差と C.I. 値

番号	$\triangle_{abc}$: (a,b,c)	w_1	w_2	w_3	ε_{12}	ε_{23}	ε_{13}	C.I.値
1	(2,2,2)	1/3	1/3	1/3	3/2	3/2	3/2	0.25

表7　α =3 のとき、重み、誤差と C.I. 値

番号	$\triangle_{abc}$: (a,b,c)	w_1	w_2	w_3	ε_{12}	ε_{23}	ε_{13}	C.I.値
1	(3,2,2)	9/24	7/24	8/24	35/18	24/18	24/18	0.363
2	(3,2,3)	−	−	−	−	−	−	0.501
3	(3,3,2)	−	−	−	−	−	−	0.501
4	(2,3,2)	8/24	9/24	7/24	24/18	35/18	24/18	0.363
5	(2,2,3)	7/24	8/24	9/24	24/18	24/18	35/18	0.363
6	(2,3,3)	−	−	−	−	−	−	0.501
7	(3,3,3)	−	−	−	−	−	−	0.667

表8　α =4 のとき、重み、誤差と C.I. 値

番号	$\triangle_{abc}$: (a,b,c)	w_1	w_2	w_3	ε_{12}	ε_{23}	ε_{13}	C.I.値
1	(4,2,2)	10.34/24	5.86/24	7.8/24	1.99	1.99	1.99	0.458
2	(4,2,3)	−	−	−	−	−	−	0.616
3	(4,3,2)	−	−	−	−	−	−	0.616
4	(4,3,3)	−	−	−	−	−	−	0.802
5	(2,4,2)	7.8/24	10.34/24	5.86/24	1.99	1.99	1.99	0.458
6	(2,4,3)	−	−	−	−	−	−	0.616
7	(3,4,2)	−	−	−	−	−	−	0.616
8	(3,4,3)	−	−	−	−	−	−	0.802
9	(2,2,4)	5.86/24	7.8/24	10.34/24	1.99	1.99	1.99	0.458
10	(2,3,4)	−	−	−	−	−	−	0.616
11	(3,2,4)	−	−	−	−	−	−	0.616
12	(3,3,4)	−	−	−	−	−	−	0.802

7．おわりに

本稿では、比較項目数を3とする一対比較値行列をとりあげて、田中（2007）が提示した緩和な整合性指標の適用可能性について、サイクル出現に限局した上で、サーティの誤差モデルに基づき数値的評価を実施した。その際、比較対照としてサーティの整合性指標 C.I. を適用した。サイクルを出現する評点（a,b,c）の組み合わせにおいて、数値験証の結果、一対比較値行列の要素で、評点が3以上、あるいは1/3以下の出現の合計数が2個以上の場合においては､緩和な整合性基準は良好な作動が見られず、C.I. と同様な結果を得た。評点が3以上、あるいは1/3以下の出現の合計数が1個のみの場合においては、C.I. 基準では整合性が認められないが、緩和な整合性基準では良好に作動した結果を得た。今回の結果は、田中（2007b）に提示した緩和な整合性指標に加えて、出現個数に上界の制限を課すことを指摘する。今後は、比

較項目数が 4 以上である一対比較値行列において、田中（2007）が提示した緩和な整合性基準の適用可能性を探ることが望まれる。そのためには、今回の知見を活かした、適切な設計のもとで多くの数値験証を行い、理論的な見通しを得ることが要請される。

参考文献

(1) Saaty,T.L.(1980).The Analytic Hierarchy Process,McGraw Hill,New YorK.
(2) 仁科健、柴山忠雄（1992）. 一対比較における固
有ベクトル法と対数最小二乗法の比較、品質、22,2,115-123.
(3) 小澤正典 (2004).AHP における整合度 C.I. 値の意味と解釈、ＯＲ学会研究部会「AHP の世界」発表資料（2004.9.24）.
(4) 田中浩光（2007a）.AHP における一対比較値の比例性診断について、日本ＯＲ学会春季研究発表会アブストラクト集、108-109.
(5) 田中浩光（2007b）.AHP における一対比較値の緩和な整合性指標について、京都大学数理解析研究所講究録 1548,122-129.
(6) 田中浩光（2009a）.AHP における一対比較値の評点化過程について、京都大学数理解析研究所講究録 1636,169-176.
(7) 田中浩光（2009b）.AHP における一対比較値の評点化過程と C.I. の挙動、日本経営数学会報告要旨集
(8) 田中浩光（2009c）.AHP における一対比較値のサイクル出現について、日本経営数学会秋季研究発表会資料
(9) 田中浩光（2010a）.AHP におけるサイクルの影響について、愛知学院大学論叢経営学研究、19、3/4 合併号、35-42..
(10) 田中浩光（2010b）.AHP におけるサイクル出現と C.I.、日本経営数学会報告要旨集
(11) 田中浩光（2010c）.AHP における一対比較値のサイクル出現について、日本経営数学会秋季研究発表会資料
(12) 田中浩光（2011）.AHP におけるサイクル出現と評点化過程、京都大学数理解析研究所講究録 1734,54-61.
(13) 田中浩光（2012a）.AHP におけるサイクル出現と誤差モデル、日本ＯＲ学会春季研究発表会アブストラクト集
(14) 田中浩光（2012b）.AHP におけるサイクル出現について京都大学数理解析研究所 RIMS 研究集会「確率的環境下での意思決定解析」発表資料（2012.11.20.）.
(15) 田中浩光（2014）. 一対比較値行列（3 × 3）における緩和な整合性指標とサーティの誤差モデル、愛知学院大学論叢経営学研究、23、2 号、1-8.