経済研究所所報
第 2 号
2022 年 2 月

論文

# 純粋公共中間財を含む特殊なヘクシャー＝オリーン型経済の国際貿易の分析

# Analysis of International Trade in a Specific Heckscher-Ohlin Economy with a Pure Public Intermediate Good

**多和田眞**

TAWADA Makoto

要旨

近年の世界経済におけるグローバル化によって国際貿易に果たす公共インフラの役割が重要になっている。本論は伝統的なヘクシャー＝オリーンの貿易モデルに純粋公共中間財を導入して、国際貿易の比較優位の分析を行うものである。一般的にヘクシャー＝オリーンのモデルに純粋公共中間財を導入すると生産可能性曲線の形状が定まらず、要素賦存量に基づく比較優位の法則が成立しない。本論では、消費財部門間の生産技術が同一という仮定を置くことで、生産可能性曲線が原点方向に凸となることを示し、その下ではリカードの場合と類似の比較優位論が成立することを示す。

Abstract

The latest wave of globalization in the world economy makes public infrastructures to be one of the key engines for the economic growth by international trade. This is particularly so in the Asian region, where a good amount of public infrastructure is supplied recently. Based on this background, the present study analizes comparative advantage in trade by the Heckscher-Ohlin model with a pure public intermediate good. In general the Hecksher-Ohlin economy does not assure the nice property on the shape of the production possibility frontier, so that a law of comparative advantage may not prevail. It is shown in this paper that, if production technologies are identical between final good sectors, the production possibility frontier becomes strictly convex and thus a law of comparative advantage in the Ricardian case holds.

キーワード

純粋公共中間財、ヘクシャー＝オリーン・モデル、比較優位論、部門間同一技術

Keywords

Pure Public Intermediate Good, Heckscher and Ohlin Model, Comparative Advantage, Identical Technologies between sectors

## 1. はじめに

近年の世界経済のグローバル化の中で、国際貿易において公共インフラの果たす役割はますます重要となっている。公共インフラの中でも生産に奉仕する公共中間財は民間企業の生産費用に大きな影響を与えることから、国際貿易の比較優位の決定要因を左右するため、貿易戦略や経済発展にとって重要な側面を持っている。そのために、公共中間財を導入した場合の比較優位論について、これまで多くの分析がなされてきた。

特に Manning and McMillan（1979）は伝統的なリカード・モデルに純粋公共中間財を導入して、公共中間財が国際貿易上の比較優位の決定要因になることを示した。その後、Tawada and Okamoto（1983）、Tawada and Abe（1984）、Okamoto（1985）、Ishizawa（1988）、Altenburg（1992）等によって、ヘクシャー＝オリーン・モデルでの公共中間財が国際貿易理論に与える影響についての分析が行われた。さらに Clarida and Findley（1992）は特殊要素モデルに公共中間財を導入して、比較優位論を論じている。

公共中間財は Meade（1952）の分類にしたがえば、環境創出型（以下では純粋公共中間財と言う）と要素不払型（以下では準公共中間財と言う）に大別される。特に純粋公共中間財は私的生産に外部効果をもたらすことから、生産可能性フロンティアが原点方向に凸となる部分が出現しやすくなるため、伝統的な貿易理論が適用できなくなる可能性がある。従って従来の分析の多くは、純粋公共財の存在する経済に多くの関心が払われてきた。特に Tawada and Abe（1984）や Okamoto（1985）、Ishizawa（1991）は純粋公共中間財のある経済で生産可能性フロンテアが凹になるため場合の条件を考察した。そして Tawada and Abe（1984）は公共中間財の生産の弾力性が産業間で等しい場合にはフロンティアは凹になることを示した。また Okamoto（1985）と Ishizawa（1991）は、それぞれ、均衡への調整が生産量調整と価格調整の混合型の場合とマーシャル的な生産量調整の場合において調整プロセスが安定であればフロンティアは凹となることを示した。

こうした多くの研究蓄積にもかかわらず、ヘクシャー＝オリーン型の経済において、生産可能性フロンティアが原点方向に全体として凸となるための生産技術条件については考察がなされていない。本論ではこの問題を扱う。2 財 2 要素 1 純粋公共中間財の存在する小国経済を考える。そしてこの経済の生産技術が 2 財間で同一であるとき、生産可能性フロンティアは原点方向に全体的に凸となることを示す。その結果、Manning and McMillan（1979）が 1 要素の場合で議論し、リカード的な比較優位の法則が本論において適用できることを示す。

以下では第 2 節でモデルを提示し、第 3 節で生産可能性フロンティアが原点方向に凸となることを示す。第 4 節では小国の貿易パターンを明らかにして、第 5 節ではこの経済では伝統的な比較優位の法則と類似の法則が適用できることを明らかにする。第 6 節はまとめとする。

## 2. モデル

2 財 2 要素 1 純粋公共中間財の存在する小国経済を考える。2 つの財は第 1 財と第 2 財とし、2 つの要素は労働と資本とする。2 つの財の生産関数を

$$X_i = R^{\alpha_i} F^i(L_i, K_i) \ , \quad i = 1,2 \tag{1}$$

とする。ただし、$X_i$は第$i$財の生産量、$L_i$と$K_i$はそれぞれ第$i$財生産のための労働と資本の投入量である。$R$は純粋公共中間財の供給量で両財の生産に共同で利用できるものとしている。関数$F^i$は$L_i$と$K_i$に関して凹かつ一次同次とする。そして、$F^i(L_i, 0) = F^i(0, K_i) = 0$であり、$(L_i, K_i) > (0,0)$のとき、$F_L^i \equiv \partial F^i/\partial L_i > 0$, $F_K^i \equiv \partial F^i/\partial K_i > 0$, $F_{LL}^i \equiv \partial^2 F^i/\partial L_i^2 < 0$, $F_{KK}^i \equiv \partial^2 F^i/\partial K_i^2 < 0$とする。$\alpha_i$は$0 < \alpha_i < 1$をみたすパラメターである。

（1）で示されるような生産関数は労働と資本に関してのみ一次同次であるため、公共中間財は 2 つの要素の投入量と競合することなく使用できる。すなわち Meade（1952）の分類する環境創出型の公共財となっている。

公共中間財の生産関数を

$$R = G(L_R, K_R) \tag{2}$$

とする。ここで、$L_R$と$K_R$はそれぞれ公共中間財生産のための労働と資本の投入量であり、$G(L_R, K_R)$は$F^i(L_i, K_i)$と同様の性質を持つものとする。

労働と資本の賦存量は外生的に与えられているものとして、その大きさをそれぞれ、$\bar{L}$と$\bar{K}$とする。これらの要素が完全雇用されるとすると、

$$L_1 + L_2 + L_R = \bar{L} \tag{3}$$

$$K_1 + K_2 + K_R = \bar{K} \tag{4}$$

である。

第 1 財と第 2 財は貿易可能な消費財として、私的な完全競争企業によって生産されるものとする。また公共中間財は政府によって供給されるものとし、そのための生産費用は所得税でまかなわれるものとする。

## 3. 生産可能性フロンティア

本節では生産可能性フロンティア（以下では *PPF* と略す）の形状を考察する。そのために生産可能性集合 S をはじめに定義しておこう。すなわち

$$\mathrm{S} = \left\{ (X_1, X_2) \in R_+^2 \middle| \begin{array}{c} X_i \leq R^{\alpha_i} F^i(L_i, K_i)\,, i = 1{,}2,\ R = G(L_R, K_R), \\ L_1 + L_2 + L_R = \bar{L}, \quad K_1 + K_2 + K_R = \bar{K} \end{array} \right\} \qquad (5)$$

とする。そして *PPF* は生産可能性集合Sの上方境界と定める。

一般的に S は純粋公共中間財が存在する場合必ずしも凸集合とはならない。すなわち *PPF* は原点方向に凸となる部分が現われる可能性がある。序論でも述べたように Tawada and Abe（1984）や Okamoto（1985）、Ishizawa（1991）は *PPF* が凹になるため場合の条件を考察しているが、Okamoto（1985）や Ishizawa（1991）ではその条件として均衡への調整過程の安定性を用いている。その十分条件はある財の価格の上昇はその財の供給を増加させるという調整であり、*PPF* 上の接線の傾きが価格比と等しくなるところで均衡となることを考えると、この条件は結局 *PPF* の凹性と表裏一帯の関係になっている。*PPF* の形状をより根元的に考察するためには、生産技術の特性にまで遡って考察することが重要である。

本論では *PPF* が逆に原点方向に凸となるような場合について考察するため、以下の仮定を置く。

仮定 1　　$F^1(L, K) = F^2(L, K)$

すなわち生産関数（1）における公共中間財を除いた 2 要素に関する生産技術は 2 つの財の間で同じとする。このとき、次の命題を得る。

命題 1

仮定 1 の下では、$\alpha_1 \neq \alpha_2$のとき *PPF* は原点方向に厳密に凸となる。

この命題の証明のために、公共中間財の供給量を一定としたときの生産可能性集合を

$$\mathrm{S}(\bar{R}) = \left\{ (X_1, X_2) \in R_+^2 \middle| \begin{array}{c} X_i \leq \bar{R}^{\alpha_i} F^i(L_i, K_i)\,, i = 1{,}2,\ \bar{R} = G(L_R, K_R), \\ L_1 + L_2 + L_R = \bar{L}, \quad K_1 + K_2 + K_R = \bar{K} \end{array} \right\}$$

として、制約的 *PPF* と呼ぶことにして、これを用いて以下の 2 つの補助定理をはじめに示そう。

補助定理 1

仮定 1 の下では、制約的 *PPF* は右下がりの直線となり、その傾きは、与えられた公共中間財の量

$\bar{R}$に対して、

$$\frac{dX_2}{dX_1} = -\frac{\bar{R}^{\alpha_2}}{\bar{R}^{\alpha_1}} \tag{6}$$

となる。

証明は *Appendix* I に示す。

補助定理 2

仮定 1 の下では、*PPF* 上では$\alpha_1 > (<)\alpha_2$のとき、$X_1$の増加に伴い公共中間財の量は増加（減少）する。

証明は *Appendix* II に示す。

補助定理 1 と 2 によって *PPF* は直線で表される制約的 *PPF* の包絡線となるから、図 1 で示されるように、原点方向に凸となり、命題 1 が成立する。

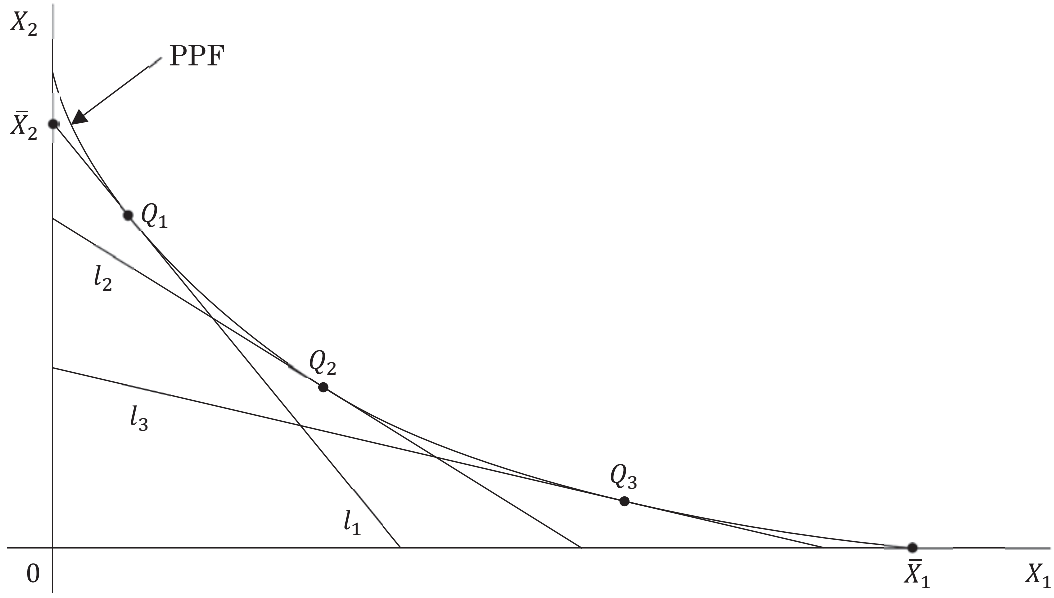


図 1

Remark 1

$\alpha_1 = \alpha_2$ の場合には補助定理 2 の証明から明らかなように、*PPF* 上の各点に対応する公共中間財の大きさは同じであるから、*PPF* は傾きが $-1$ の直線となる。

Remark 2

本論文ではヘクシャー＝オリーン型の経済を土台としているが、これと類似的なモデルである特殊要素型の経済もまた貿易理論では状況に応じてよく用いられる。その場合には、生産関数（1）は資本が各生産部門に特殊的であるとして、

$$X_i = R^{\alpha_i} F^i(L_i, \bar{K}_i) \ , \quad i = 1,2 \qquad (1')$$

と表される。ここで資本は部門に固定的であるため、資本に関する要素制約式（4）は

$$K_i = \bar{K}_i \quad i = 1,2 \qquad (1')$$

となる。公共中間財は労働のみで生産されるものとして、生産関数（2）の代わりに$R = L_R$としよう。このような経済で、Clarida and Findley（1992）は、特に$F^i(L_i, \bar{K}_i)$が Cobb=Douglas 型の$L_i^{\beta} \bar{K}_i^{1-\beta}$で表され、仮定 1 を満たすような場合について比較優位の分析を行っている。最近 Tawada, Suga and Yanase（2021）はこの Clarida and Findley（1992）の経済での *PPF* の形状について分析し、$\beta$の値が十分小さいときは *PPF* は凹となるが、$\beta$が十分大きいときは凹－凸－凹となることを導いている。すなわち特殊要素モデルでは財の生産関数が仮定 1 を満たしたとしても *PPF* は原点方向に凸となることはない。その理由は特殊要素モデルにおける制約的 *PPF* は必ず厳密な凹となることによる。しただって、制約的 *PPF* の包絡線で示される *PPF* は両軸付近では必ず凹となるからである。

## 4. 小国の貿易パターン

本節ではこの経済が小国であるとして、この国の貿易パターンを見ていくことにする。政府の公共財の供給に関して次の仮定を置く。

仮定 2

政府は国内の経済厚生が均衡で最大となるように、公共中間財の供給量を決定するものとする。その費用は所得税でまかなうものとする。

この仮定にしたがって、政府が公共中間財を供給すると、与えられた公共中間財の下で決まる制約的 *PPF* のもとで民間企業は利潤最大化行動に従って第 1 財と第 2 財の生産量を決定することになる。

この国の厚生水準は国全体の集計的な効用水準で表されるものとする。効用は第 1 財と第 2 財の消費量から決まる効用関数で表されるものとする。効用関数は仮定 3 の性質を持つものとする。

仮定 3

一国の厚生水準を表す集計的効用関数はホモセティックで、いずれかの財の消費がゼロのとき、

効用はゼロであり、効用が正のときには、少なくとも一つの財の消費が増加すれば効用は増加する。また効用関数の無差別曲線は原点方向に厳密な凸とする。

以上の仮定の下では、閉鎖経済の均衡は図 2 の点 $E$ で表される。この点で *PPF* は無差別曲線と接していて、その接線の傾きの大きさ $p^A$ が第 2 財に対する第 1 財の均衡価格比となる。

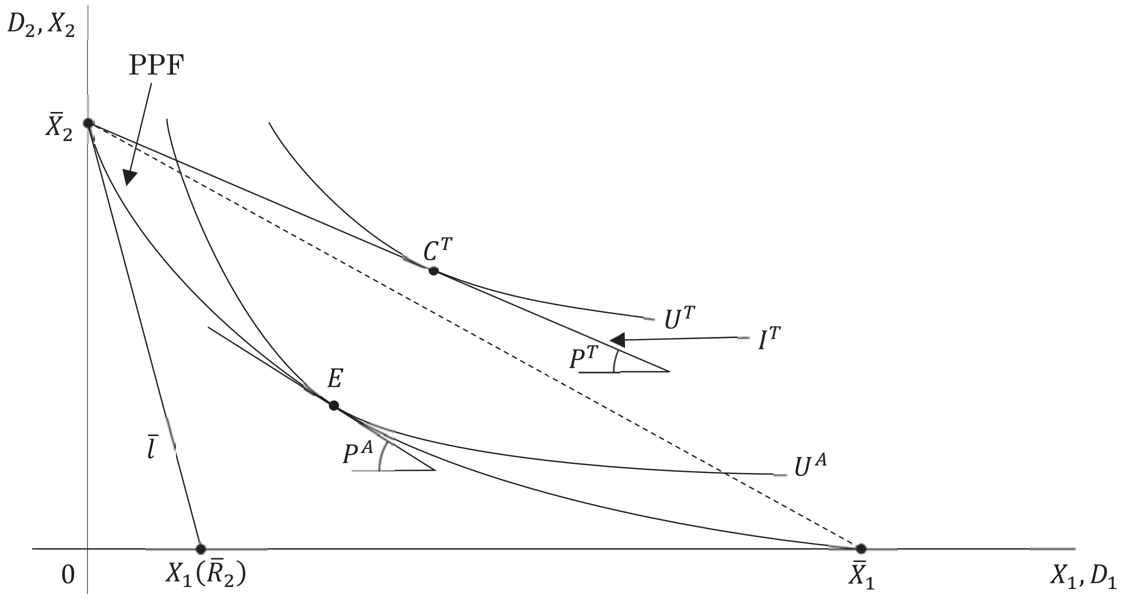


図 2

一方自由貿易下で、与えられた国際価格比を$p^T$としよう。このとき小国の貿易は、$p^T < (>) \bar{X}_2/\bar{X}_1$のときは、第 2 財（第 1 財）に生産特化してその財を輸出することになる。ただし$\bar{X}_i$は第$i$財に生産特化したときのその財の最大生産量とする。

自由貿易下で与えられた財価格比の下で、小国の貿易のパターンがこのように決まることは以下のようにして説明できる。例えば$p^T < \bar{X}_2/\bar{X}_1$としよう。この国が第 2 財に特化したときの所得制約線は図 2 の$I^T$となる。この時の消費点は無差別曲線が$I^T$と接する$C^T$となる。このときが *PPF* 上の他のどの生産点の下で達成される貿易均衡点よりも厚生は高くなる。そこで政府は第 2 財特化を実現させるように、この特化点に対応する公共中間財の量（これを$\bar{R}_2$とする）を供給すると、消費財を生産する企業は$\bar{R}_2$の下での制約的 *PPF*（これを図 2 の直線 $\bar{l}$ とする）に直面する。よって均衡生産点は第 2 財の特化点となり、均衡消費点は$C^T$となる。よって第 2 財に特化して、その財を輸出することになる。$p^T > \bar{X}_2/\bar{X}_1$の場合も同様にして第 1 財に特化してその財を輸出することになる。いずれにしても図 2 に示されるように貿易時のときの効用水準は閉鎖経済のときより高くなるから正の貿易利益を享受できる。

以上を命題 2 としてまとめておこう。

命題 2

仮定 1 から 3 をみたす小国経済を考える。$\bar{X}_i$, $i = 1,2$ , を第$i$財に生産特化したときのその財の最

大生産量としたとき、第 2 財に対する第 1 財の国際価格比$p^T$が、$p^T < (>) \bar{X}_2/\bar{X}_1$ であるならば、自由貿易下でこの国は第 2 財（第 1 財）に特化して、その財を輸出する。そして正の貿易利益を享受できる。

## 5. 比較優位の法則

2 国間の貿易における比較優位を分析するために生産技術と財の選好は同じであるが、要素賦存量が異なる二つの国、$A$と$B$を考える。これらの二つの国間で要素賦存量比率が同一であるとき、両国の *PPF* に関して次の補助定理が成立する。

補助定理 3

仮定 1 をみたし、$\alpha_1 > \alpha_2$であるような生産技術と労働と資本の要素賦存量比率が同じ二つの国、$A$と$B$を考える。$A$国のほうが$B$国よりも要素賦存量が大きいとすると、両国の *PPF* 上での二つの財の生産比率の等しい点で、*PPF* の傾きの絶対値の大きさを比べると

$$\left|\frac{dX_2^A}{dX_1^A}\right| < \left|\frac{dX_2^B}{dX_1^B}\right| \tag{7}$$

が成立する。ただし$X_i^j$は第$j$国の第$i$財の生産量である。

証明は *Appendix* III に示す。

補助定理 3 を用いて、$A$国と$B$国の間での比較優位についてみていくことにする。補助定理 3 の前提条件に加えて、$A$、$B$両間で選好が同一で、選好に関して仮定 3 を満たすとき、閉鎖経済における$A$国と$B$国の均衡点をそれぞれ、$E^A$と$E^B$として、図 3 に示すと、第 1 財の均衡相対価格は$A$国のほうが$B$国より低くなる。これは図に示されるとおり、無差別曲線は両国共通であり、$A$国の *PPF* は$B$国の *PPF* はよりも上方にあって、全体的に緩やかな傾斜をしているため、無差別曲線と *PPF* が接する点は$A$国の点が$B$国の右上方になり、その接線の傾きはより緩やかになっている。すなわ$A$国と$B$国の閉鎖経済での第 1 財の相対的均衡価格をそれぞれ、$p^A$と$p^B$とすると、$p^A < p^B$となる。

すなわち要素賦存量の比が等しい 2 国の間では、要素賦存量の大きいほうの国が公共中間財で表される私的限界費用$1/R^{\alpha_i}$の小さい方の財に比較優位を持つことになる。以上のことをいかに命題 3 としてまとめておこう。

命題 3

仮定 1 をみたす生産技術と労働と資本の賦存量比率、及び仮定 3 を満たす選好が同じ二つの国を考える。これらの国の間では要素賦存量の大きいほうの国が公共中間財で表される限界費用の小さい方の財に比較優位を持ち、したがって閉鎖経済ではその財の相対価格が他方の国よりも低くなる。

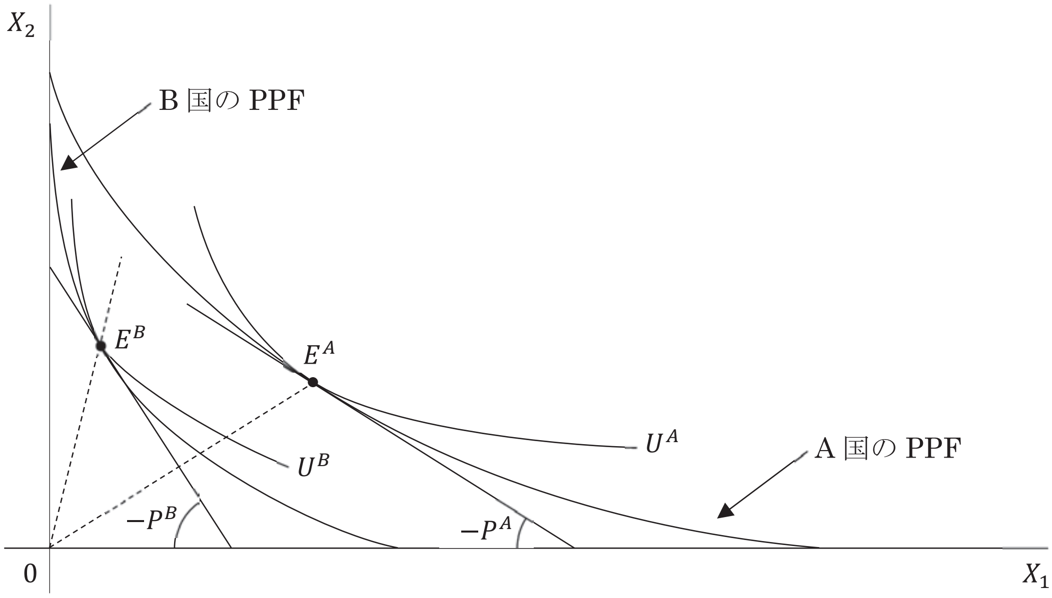


図 3

以上における意味での比較優位を用いて、賦存量の大きい$A$国と小さい$B$国の間での自由貿易を考えると、命題 2 と補助定理 3 によって、次の命題を得る。

命題 4

仮定 1 をみたす生産技術と労働と資本の賦存量比率、及び仮定 3 を満たす選好が同じ二つの国$A$、$B$を考える。$\alpha_1 > \alpha_2$として、$A$国のほうが$B$国よりも要素賦存量が大きいものとする。このとき仮定 2 の下で、$A$国と$B$国の間での自由貿易で、$p^T$が均衡貿易価格比となるためには

$$\frac{\bar{X}_2^A}{\bar{X}_1^A} \leq p^T \leq \frac{\bar{X}_2^B}{\bar{X}_1^B}$$

となっていなくてはならない。そしてこのとき、$A$国（$B$国）は第 1 財（第 2 財）に特化して第 1 財（第 2 財）を輸出する。そして両国共に正の貿易利益を得る。

すなわち貿易は比較優位の法則に従うことになる。しかし要素賦存量比率の異なる 2 国間では貿易はこの法則に従うとは限らない。そこで要素賦存量比率が異なる場合について考察を加えていこう。そのために次の補助定理を用いることにする。

補助定理 4

$A$国と$B$国の労働と資本の賦存量を$\bar{L}^i$と$\bar{K}^i$，$i = A, B$，とし、$\bar{K}^A/\bar{L}^A > (<) \bar{K}^B/\bar{L}^B$かつ$\bar{L}^A \geq \bar{L}^B (\bar{K}^A \geq \bar{K}^B)$）とする。また両国で生産技術は同一で仮定 1 を満たし、$\alpha_1 > \alpha_2$であるとする。

このとき公共中間財生産が消費財生産に比べて資本（労働）集約的であるならば 2 国の *PPF* 上で第 1 財と第 2 財の生産比率が同一の点では補助定理 3 と同じ（7）が成立する。

証明は *Appendix* IV に示す。

よってこの補助定理から次の命題を得る。

命題 5

$A$ 国と $B$ 国の労働と資本の賦存量を $\bar{L}^i$ と $\bar{K}^i$，$i = A, B$，とし、$\bar{K}^A/\bar{L}^A > (<) \bar{K}^B/\bar{L}^B$ かつ $\bar{L}^A \geq \bar{L}^B (\bar{K}^A \geq \bar{K}^B)$）とする。また両国で選好と生産技術は同一で仮定 1 と 3 を満たし、$\alpha_1 > \alpha_2$ であるとする。また公共中間財生産が消費財生産に比べて資本（労働）集約的であるとする。このとき仮定 2 の下では、$A$国と$B$国の間での自由貿易では、$A$国（$B$国）は第 1 財（第 2 財）に特化して第 1 財（第 2 財）を輸出する。そして両国共に正の貿易利益を得る。

本論で示した比較優位の法則は要素賦存量の大きさが公共中間財の供給量を通して両財の私的要素の限界生産性に影響をあたえ、それが貿易パターンの決定要因になっている。したがって両国間の要素賦存量の比率に基づくヘクシャー＝オリーンの比較優位というよりもリカード的な技術格差による比較優位により馴染む。

しかし以下のいくつかの点で、公共中間財の存在しない伝統的なリカードの貿易論とは異なっている。

(i) 伝統的なリカードの比較優位論では要素賦存量の絶対的大きさとは無関係であるのに対して、公共中間財が存在する場合には要素賦存量の大きいほど公共中間財の供給量を大きく出来るため、公共中間財が与える私的要素の限界生産性への効果の大きいほうの財に有利となる。すなわち要素賦存量の絶対的大きさが比較優位に影響を与えることになる。

(ii) 2 国間で要素賦存量に大きな差がある場合には、伝統的なリカード・モデルの場合には貿易によって賦存量大国は不完全特化となり貿易利益は得られないが、公共中間財のある本論の場合には、要素賦存量の大きさとは無関係に、常に両国とも完全特化となるため、要素賦存量の差が非常に大きい 2 国間の貿易では均衡が存在しなくなる可能性がある [1]。

(iii) 貿易の開始に伴い閉鎖経済のときと同じ水準の国際価格に直面した場合、伝統的なリカードの場合には貿易利益は得られないが、本論の場合にはどちらかの財に特化することで、必ず正の貿易利益を得ることになる。

[1] Suga and Tawada（2007）では、公共中間財の存在する場合で *PPF* が原点方向に凸であっても、貿易下で不完全特化の生産が可能であるような政府の公共財供給方法を考えている。その場合は貿易によって損失が生じる可能性が指摘されている。

## 6. まとめ

本論では資本と労働の二つの本源的要素のある伝統的なヘクシャー＝オリーン的な貿易モデルに純粋公共中間財を導入して、国際貿易の比較優位論を考察した。純粋公共中間財が存在しなければ一国の生産可能性フロンティアは凹となり、その下で要素賦存量比率に基づくヘクシャー＝オリーンの比較優位の定理が導かれる。しかし、純粋公共中間財が存在する経済では生産可能性フロンティアの凹性が必ずしも保障されないため、要素賦存量比率に基づく比較優位論が一般的には成立しない。そのため従来の研究では生産可能性フロンティアが凹となるための条件を考察して、そのような条件の下で貿易理論の分析が行われてきた。

本論ではこれに対して、生産可能性フロンティアが原点方向に凸となるための条件を導入して、その下でリカード的な労働の限界生産性の国家間の相対的な差による比較優位論を展開した。特に本源的要素に関する生産技術が最終財の間で同じである場合生産可能性フロンティアは原点方向に凸となることを示し、その場合には要素賦存量比率が同じ二つの国で要素賦存量の豊富な国は公共中間財の供給量が他方の国よりも大きくなるため、公共中間財によって決まる本源的要素の限界生産性がより大きいほうの財に比較優位を持ち、自由貿易の下では、この財に生産特化して、この財を輸出することが示された。

生産可能性フロンティアが原点方向に凸となるための必要十分条件は公共中間財を所与としたときの制約的フロンティアが直線になることである。従って多数財、多数要素の下でも制約的フロンティアが平面であれば、生産可能性フロンティアは原点方向に凸となる。このような点に注目して、多数財・多数要素の場合への拡張を図ることは今後の課題である。

**（謝辞）** 本論文は本学経済研究所の 2020 年度の研究プロジェクトに対する研究助成を受けて行われた成果報告である。記して本学の経済研究所に感謝いたしたい。

## 参考文献

Altenburg, L.（1992）“Some theorems with a public intermediate good”, *Canadian Journal of Economics* 25-2, 310-332.

Clarida, R. H., and R. Findlay（1992）“Government, trade, and comparative advantage,” *American Economic Review* 82（2）, 122-127.

Ishizawa, S.（1988）“Increasing returns, public inputs, and international trade”, *American Economic Review* 78, 794-795.

Ishizawa, S.（1991）“Increasing returns, public inputs, and transformation curves”, *Canadian Journal of economics* 24（1）, 144-160.

Manning, R., and J. McMillan（1979）“Public intermediate goods, production possibilities, and international trade,” *Canadian Journal of Economics* 12（2）, 243-257.

Meade, J. E.（1952）“External economies and diseconomies in a competitive situation”, *Economic Journal* 62, 54-

67.
Okamoto, H.（1985）“Production possibilities and international trade with public intermediate good: a generalization,” *Economic Studies Quarterly* 36（1）, 35-45.
Suga, N. and M. Tawada（2007）“International trade with a public intermediate good and the gains from trade”, *Review of International Economics* 15, 284-293.
Tawada, M., and K. Abe（1984）“Production possibilities and international trade with a public intermediate good,” *Canadian Journal of Economics* 17（2）, 232-48.
Tawada, M. and H. Okamoto（1983）“International trade with a public intermediate good”, *Journal of International Economics* 15, 101-115.
Tawada, M., N. Suga and A. Yanase（2021）“Government, trade, and comparative advantage, revisited,” *mimeographed*.
Tawada, M. and A. Yanase（2020）“Production possibilities and trade in a one-primary factor economy with public infrastructure”, *Asia-Pacific Journal of Regional Science* 5, 169-189.

## Appendix I

補助定理 1 の証明

$R$を一定としたときの制約線 PPF は次の問題の解から決まる$(X_1, X_2)$である。

$$
\begin{array}{lll}
\underset{\substack{L_1, K_1 \\ L_2, K_2 \\ L_R, K_R}}{Max}\ R^{\alpha_2} F^2(L_2, K_2) & sub.to & \bar{X}_1 = R^{\alpha_1} F^1(L_1, K_1) \\
 & & \bar{R} = G(L_R, K_R) \\
 & & L_1 + L_2 + L_R = \bar{L} \\
 & & K_1 + K_2 + K_R = \bar{K}
\end{array}
$$

ただし$X_1$、$R$は$\bar{X}_1$と$\bar{R}$に固定する。この問題のラグランジュ関数を

$$\mathcal{L} = G^{\alpha_2} F^2 - \lambda(\bar{X}_1 - G^{\alpha_1} F^1) - \mu(\bar{R} - G) - \delta_L(L_1 + L_2 + L_R - \bar{L}) - \delta_K(K_1 + K_2 + K_R - \bar{K})$$

とすると、一階の最適条件は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_R} = \alpha_2 G^{\alpha_2 - 1} G_L F^2 + \lambda \alpha_1 G^{\alpha_1 - 1} G_L + \mu G_L - \delta_L = 0 \qquad (\mathrm{I}-1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_R} = \alpha_2 G^{\alpha_2 - 1} G_K F^2 + \lambda \alpha_1 G^{\alpha_1 - 1} G_K + \mu G_K - \delta_K = 0 \qquad (\mathrm{I}-2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_2} = G^{\alpha_2} F_L^2 - \delta_L = 0 \qquad (\mathrm{I}-3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_2} = G^{\alpha_2} F_K^2 - \delta_K = 0 \qquad (\mathrm{I}-4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} = \lambda G^{\alpha_1} F_L^1 - \delta_L = 0 \qquad (\mathrm{I}-5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_1} = \lambda G^{\alpha_1} F_K^1 - \delta_K = 0 \qquad (\mathrm{I}-6)$$

$(\mathrm{I}-1)$～$(\mathrm{I}-6)$より

$$\frac{G_K}{G_L} = \frac{F_K^2}{F_L^2} = \frac{F_K^1}{F_L^1} \qquad (\mathrm{I}-7)$$

を得る。ここで$G$、$F^i$、$i = 1,2$は 1 次同次関数であるため、$G = L_R g(k_R)$、ただし$k_R \equiv K_R/L_R$、および $F^i = L_i f_i(k_i)$、ただし $k_i \equiv K_i/L_i$、と表わせる。このとき $G_K = g'(k_R) \equiv dg/dk_R$、$F_K^i = f_i'(k_i) \equiv df_i/dk_i$、$G_L = g - g'k_R$、$F_L^i = f_i - f_i'k_i$、と表わせる。これに仮定 1 を適用すると、$f^1(k) = f^2(k) \equiv f(k)$として、$(\mathrm{I}-7)$は

$$\frac{f(k_1) - k_1 f'(k_1)}{f'(k_1)} = \frac{g(k_R) - k_R g'(k_R)}{g'(k_R)} = \frac{f(k_2) - k_2 f'(k_2)}{f'(k_2)}$$

となるから、$k_1 = k_2 \equiv k$となる。すなわち$(\mathrm{I}-7)$は

$$\frac{f(k) - k f'(k)}{f'(k)} = \frac{g(k_R) - k_R g'(k_R)}{g'(k_R)} \quad \text{ただし} \quad k \equiv k_2 = k_1 \qquad (\mathrm{I}-8)$$

となる。

これを考慮すると、問題の制約条件は

$$\bar{R} = L_R g(k_R) \qquad (\mathrm{I}-9)$$

$$\bar{X}_1 = L_1 f(k) \bar{R}^{\alpha_1} \qquad (\mathrm{I}-10)$$

$$L_1 + L_2 + L_R = \bar{L} \qquad (\mathrm{I}-11)$$

$$(L_1 + L_2)k + L_R k_R = \bar{K} \qquad (\mathrm{I}-12)$$

と表わされる。$(\mathrm{I}-11)$を用いて$(\mathrm{I}-12)$から$L_2$を消去すると、

$$(\bar{L} - L_R)k + L_R k_R = \bar{K} \qquad (\mathrm{I}-13)$$

となる。

$(\mathrm{I}-8)$、$(\mathrm{I}-9)$、$(\mathrm{I}-10)$、$(\mathrm{I}-13)$から$k_1$、$k_R$、$L_1$、$L_R$が決まる。この方程式体系を全微分して以下の方程式体系を得る。

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{kf''}{(f')^2} & \dfrac{k_R g''}{(g')^2} & 0 & 0 \\ \bar{L}-L_R & L_R & 0 & k_R-k \\ L_1 f' R^{\alpha_1} & 0 & fR^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & L_R g' & 0 & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dk_1 \\ dk_R \\ dL_1 \\ dL_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d\bar{X}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{I}-14)$$

ただし$f'' \equiv \partial^2 f/\partial k^2 < 0$、$g'' \equiv \partial^2 g/\partial k_R^2 < 0$である。

$(\mathrm{I}-14)$の左辺の正方行列の行列式を$\Delta(\bar{R})$とすると

$$\Delta(\bar{R}) = -\frac{k_1 f''}{(f')^2} L_R \frac{f}{f'} g' - \frac{k_R g''}{(g')^2}(\bar{L}-L_R)g > 0 \qquad (\mathrm{I}-15)$$

が$F^i_{KK} < 0$、$F^i_{LL} < 0$、$G_{LL} < 0$、$G_{KK} < 0$の下で成立する。

$(\mathrm{I}-14)$から$dk/d\bar{X}_1$を求めると、$(\mathrm{I}-14)$にクラメールの公式を用いて、

$$\frac{dk}{d\bar{L}} = \frac{1}{\Delta(\bar{R})} \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{k_R g''}{(g')^2} & 0 & 0 \\ 0 & L_R & 0 & k_R-k \\ 1 & 0 & fR^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & L_R g' & 0 & g \end{vmatrix}$$

となり、この式の右辺の正方行列の行列式はゼロとなるから、

$$\frac{dk}{d\bar{X}_1} = 0 \qquad (\mathrm{I}-16)$$

となる。よって$(\mathrm{I}-8)$より

$$\frac{dk_R}{d\bar{X}_1} = 0 \qquad (\mathrm{I}-17)$$

である。同様にして$(\mathrm{I}-14)$から

$$\frac{dL_R}{d\bar{X}_1} = 0 \qquad (\mathrm{I}-18)$$

である。

一方$R$が不変であるため、

$$dX_i = R^{\alpha_1} L_i f'(k) dk + R^{\alpha_1} f(k) dL_i,\ \ i = 1{,}2 \qquad (\mathrm{I}-19)$$

であり、$(\mathrm{I}-11)$と$(\mathrm{I}-18)$より$dL_1 = -dL_2$である。よって$(\mathrm{I}-19)$と$(\mathrm{I}-16)$から

$$\frac{dX_2}{dX_1} = -\frac{R^{\alpha_2}}{R^{\alpha_1}} \qquad (\mathrm{I}-20)$$

となる。すなわち$R$を固定した時の制約線 PPF は傾きが$-R^{\alpha_2}/R^{\alpha_1}$の直線となる。

Appendix II

補助定理 2 の証明

PPF 上の各点は次の問題の解によって与えられる。

$$\begin{array}{lll} \underset{\substack{L_1, K_1 \\ L_2, K_2 \\ L_R, K_R \\ R}}{Max}\ R^{\alpha_2} F^2(L_2, K_2) & sub.to & \bar{X}_1 = R^{\alpha_1} F^1(L_1, K_1) \\ & & R = G(L_R, K_R) \\ & & L_1 + L_2 + L_R = \bar{L} \\ & & K_1 + K_2 + K_R = \bar{K} \end{array}$$

ただし$\bar{X}_1$は所与とする。この問題のラグランジアン関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = R^{\alpha_2} F^2(L_2, K_2) - \lambda\left(\bar{X}_1 - R^{\alpha_1} F^1(L_1, K_1)\right) - \mu\left(R - G(L_R, K_R)\right) - \delta_2(L_1 + L_2 + L_R - \bar{L}) \\ - \delta_K(K_1 + K_2 + K_R - \bar{K}) \end{aligned}$$

とすると一階の最適条件は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_R} = \mu G_L - \delta_L = 0 \qquad (\mathrm{II}-1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_R} = \mu G_K - \delta_K = 0 \qquad (\mathrm{II}-2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = \alpha_2 R^{\alpha_2 - 1} F^2 + \lambda \alpha_1 R^{\alpha_1 - 1} F_1 - \mu = 0 \qquad (\mathrm{II}-3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_2} = R^{\alpha_2} F_L^2 - \delta_L = 0 \qquad (\mathrm{II}-4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_2} = R^{\alpha_2} F_K^2 - \delta_K = 0 \qquad (\mathrm{II}-5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} = \lambda R^{\alpha_1} F_L^1 - \delta_L = 0 \qquad (\mathrm{II}-6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_1} = \lambda R^{\alpha_1} F_K^1 - \delta_K = 0 \qquad (\mathrm{II}-7)$$

となる。ここで$f(k)$と$g(k_R)$を Appendix I で定めた関数とすると、$(\mathrm{II}-4)$～$(\mathrm{II}-7)$と仮定 1 によって

$$\frac{f(k_1) - k_1 f'(k_1)}{f'(k_1)} = \frac{f(k_2) - k_2 f'(k_2)}{f'(k_2)} \qquad (\mathrm{II}-8)$$

を得る。すなわち

$$k_1 = k_2 \equiv k \qquad (\mathrm{II}-9)$$

である。

$(\mathrm{II}-4)$、$(\mathrm{II}-5)$からそれぞれ、

$$\delta_L = R^{\alpha_2}(f(k) - f'(k)k)$$
$$\delta_K = R^{\alpha_2} f'(k)$$

である。そこで$(\mathrm{II}-6)$によって

$$\lambda = \frac{R^{\alpha_2}}{R^{\alpha_1}}$$

となる。

そこで$(\mathrm{II}-1)$、$(\mathrm{II}-2)$、$(\mathrm{II}-3)$はそれぞれ

$$\mu(g - g' k_R) - R^{\alpha_2}(f - f'k) = 0 \qquad (\mathrm{II}-10)$$

$$\mu g' - R^{\alpha_2} f' = 0 \qquad (\mathrm{II}-11)$$

$$\alpha_2 R^{\alpha_2 - 1} L_2 f(k) + \frac{R^{\alpha_2}}{R^{\alpha_1}} \alpha_1 R^{\alpha_1 - 1} L_1 f(k) - \mu = 0 \qquad (\mathrm{II}-12)$$

となる。$(\mathrm{II}-11)$を用いると$(\mathrm{II}-12)$は

$$\alpha_2 L_2 f + \alpha_1 L_1 f - \frac{f'}{g'} R = 0$$

これに$L_1 + L_2 + L_R = \bar{L}$、$L_1 = \bar{X}_1 / R^{\alpha_1} f$を代入してまとめると、

$$\alpha_2(\bar{L} - L_R) f g' R^{\alpha_1} + (\alpha_1 - \alpha_2) g' \bar{X}_1 - f' R^{\alpha_1 + 1} = 0 \qquad (\mathrm{II}-13)$$

を得る。$(\mathrm{II}-10)$と$(\mathrm{II}-11)$から

$$\frac{g - g' k_R}{g'} = \frac{f - f' k}{f'} \qquad (\mathrm{II}-14)$$

となる。一方、制約条件$L_1 + L_2 + L_R = \bar{L}$と$K_1 + K_2 + K_R = \bar{K}$および$(\mathrm{II}-9)$によって

$$k(\bar{L} - L_R) + L_R k_R = \bar{K} \qquad (\mathrm{II}-15)$$

を得る。

以上から、$(\mathrm{II}-14)$、$(\mathrm{II}-13)$、$R = L_R g$、および$(\mathrm{II}-15)$によって$k$、$k_R$、$L_R$、$R$が決まる。そこでこれらを全微分して以下の方程式体系を得る。

$$\begin{bmatrix} \frac{f'' f}{(f')^2} & -\frac{g'' g}{(g')^2} & 0 & 0 \\ A & B & C & D \\ \bar{L} - L_R & L_R & k_R - k & 0 \\ 0 & -L_R g' & -g & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dk \\ dk_R \\ dL_R \\ dR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\alpha_1 - \alpha_2) g' d\bar{X}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{II}-16)$$

ただし

$$A \equiv R^{\alpha_1}[\alpha_2(\bar{L} - L_R) f' g' - f'' R] > 0$$

$$B \equiv g''[\alpha_2(\bar{L} - L_R) f R^{\alpha_1} + (\alpha_1 - \alpha_2)\bar{X}_1] = g'' f R^{\alpha_1}(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2) < 0$$

$$C \equiv -\alpha_2 f g' R^{\alpha_1} < 0$$

$$D \equiv R^{\alpha_1 - 1}[\alpha_1 \alpha_2(\bar{L} - L_R) f g' - (1 + \alpha_1) f' R]$$

である。

$(\mathrm{II}-16)$を$dR/d\bar{X}_1$について解くと、

$$\frac{dR}{d\,\bar{X}_1} = \frac{|J_R|}{|J|} \tag{II − 17}$$

と表される。ただし$|J|$は(II − 16)の左辺の正方行列を$J$として、その行列式であり、また

$$|J_R| \equiv \begin{vmatrix} \frac{f''f}{(f')^2} & -\frac{g''g}{(g')^2} & 0 & 0 \\ A & B & C & -(\alpha_1-\alpha_2)g' \\ \bar{L}-L_R & L_R & k_R-k & 0 \\ 0 & -L_R g' & -g & 0 \end{vmatrix} ,$$

と定めている。ここで$|J_R|$と$|J|$を計算すると、

$$|J_R| = (\alpha_1-\alpha_2)g'\left[\frac{f''f}{(f)^2}L_R\frac{f}{f'}g' + (\bar{L}-L_R)g\frac{g''g}{(g')^2}\right] < (>)0 \tag{II − 18}$$

が$\alpha_1 > (<)\alpha_2$の下で成立する。

一方$|J|$については、

$$|J| = \frac{f''f}{(f')^2}[B(k_R-k) - CL_R - D(g-(k_R-k)g')L_R]$$

$$+\frac{g''g}{(g')^2}[A(k_R-k) - C(\bar{L}-L_R) - D(\bar{L}-L_R)g]$$

$$= \left[\frac{f''f}{(f')^2}(k_R-k)B + \frac{g''g}{(g')^2}(k_R-k)(-R^{\alpha_1}f''R)\right] - L_R\frac{f''f}{(f')^2}[C + D(g-(k_R-k)g')]$$

$$+\frac{g''g}{(g')^2}(L-L_R)[R^{\alpha_1}\alpha_2 f'g'(k_R-k) - (C+Dg)]$$

となる。ここで、(II ― 13)から$(\alpha_1L_1+\alpha_2L_2)fg' = f'gL_R$であり、(II ― 14)から$gf'-fg' = f'g'(k_R-k)$であることを用いて計算すると、

$$\frac{f''f}{(f')^2}(k_R-k\,)B + \frac{g''g}{(g')^2}(k_R-k)(-R^{\alpha_1}f''R) = -f''g''(k_R-k)^2R^{\alpha_1}\frac{g}{g'}L_R < 0 \quad 、$$

$$C + D(g-(k_R-k)g') = g'\frac{f}{f'}R^{\alpha_1-1}fg'[\alpha_1\alpha_2(L_1+L_2) - (1+\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1L_1+\alpha_2L_2)] < 0$$

$$R^{\alpha_1}\alpha_2 f'g'(k_R-k)-\left(C+D_g\right)=R^{\alpha_1-1}gfg'[(1+\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1 L_1+\alpha_2 L_2)-\alpha_1\alpha_2(L_1+L_2)]$$
$$>0$$

となる。よって$|J|<0$となるから、$(\mathrm{II}-17)$によって

$$\frac{dR}{d\,\bar{X}_1}>(<)0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1>(<)\alpha_2$$

となる。

Appendix III

補助定理 3 の証明

Appendix II で示した方程式体系$(\mathrm{II}-14)$、$(\mathrm{II}-13)$、$R=L_R g$、および$(\mathrm{II}-15)$を考え、$X_1$を不変として$\bar{L}$と$\bar{K}$の変化を考慮して、これらの方程式体系を全微分する。ここで$\bar{L}$と$\bar{K}$の変化は$\bar{K}/\bar{L}$を一定とすると、$d\bar{K}=\bar{k}d\bar{L}$、ただし$\bar{k}\equiv\bar{K}/\bar{L}$である。このとき変化の方程式体系は

$$J\begin{bmatrix} dk \\ dk_R \\ dL_R \\ dR \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha_2 fg'R^{\alpha_1}d\bar{L} \\ \left(\bar{k}-k\right)d\bar{L} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{III}-1)$$

となる。$(\mathrm{III}-1)$から$dR/d\bar{L}$を求めると、

$$\frac{dR}{dL}=\frac{|\Delta|}{|J|} \quad , \qquad (\mathrm{III}-2)$$

ただし

$$|\Delta|\equiv\begin{vmatrix} \dfrac{f''f}{(f')^2} & -\dfrac{g''g}{(g')^2} & 0 & 0 \\ A & B & C & -\alpha_2 fg'R^{\alpha_2} \\ \bar{L}-L_R & L_R & k_R-k & \bar{k}-k \\ 0 & -L_R g' & -g & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{f''f}{(f')^2}\left[Bg\left(\bar{k}-k\right)-CL_R g'\left(\bar{k}-k\right)+\alpha_2 fg'R^{\alpha_1}\left(L_R g-L_R g'(k_R-k)\right)\right]+\frac{g''g}{(g')^2}$$

$$\cdot g\left[A(\bar{k}-k)+(\bar{L}-L_R)\alpha_2 f g' R^{\alpha_1}\right]$$

$$= R^{\alpha_1}\frac{f''f}{f'}fg''(\alpha_1L_1+\alpha_2L_2)(\bar{k}-k)g - R^{\alpha_1}\left(\frac{g}{g'}\right)^2 g''f''L_Rg(\bar{k}-k)$$

$$+R^{\alpha_1}\left(\frac{f}{f'}\right)^2 f''\alpha_2g'L_Rg'\frac{f}{f'}+R^{\alpha_1}\left(\frac{g}{g'}\right)^2 g''[\alpha_1(\bar{L}-L_R)f'g'+(\bar{L}-L_R)\alpha_2fg']$$

となる。ここで

$$R^1f''g''(\bar{k}-k)g\left[\left(\frac{f}{f'}\right)^2(\alpha_1L_1+\alpha_2L_2)-\left(\frac{g}{g'}\right)^2L_R\right]=R^{\alpha_1}f''g''(\bar{k}-k)gL_R\frac{g}{g'}(k-k_R)<0$$

が$(\bar{k}-k)(k-k_R)<0$によって成立する。よって$|\Delta|<0$となる。一方 Appendix II で示したように$|J|<0$となる。よって$(\mathrm{III}-2)$によって$dR/dL>0$となる。補助定理 1 を用いると PPF の接線の傾きの絶対値を$|dX_2/dX_1|$として、

$$\frac{d}{d_L}\left|\frac{dX_2}{dX_1}\right|=(\alpha_2-\alpha_1)R^{\alpha_2-\alpha_1-1}\frac{dR}{dL}<0$$

となる。$L$が増加したときに PPF は上方にシフトして、このシフト後の$X_1$が同一の点での$|dX_2/dX_1|$は小さくなる。さらに PPF は原点方向に凸であることから、$X_2/X_1$が不変であるようなシフト後の PPF の点では$X_1$は増加しているため$|dX_2/dX_1|$はさらに小さくなるから補助定理 3 を得る。

Appendix IV

補助定理 5 の証明

$\bar{K}/\bar{L}$が大きくなるように$\bar{K}$、$\bar{L}$をともに大きくする場合について示す。

はじめに$\bar{K}$のみを増加させたときの、$X_1$が不変の下での PPF の傾き$dX_2/dX_1$について考察する。そのため Appendix III の$(\mathrm{III}-1)$に基づいて、$dX_1=0$、$d\bar{L}=0$、$dK>0$を考えると、

$$J\cdot\begin{bmatrix}dk\\dk_R\\dL_R\\dR\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\d\bar{K}\\0\end{bmatrix}$$

となる。そこで

$$\frac{dR}{d\bar{K}} = \frac{|\Delta_K|}{|J|}$$

となる。ただし

$$\begin{aligned}
|\Delta_K| &= \begin{vmatrix} \dfrac{f''f}{(f')^2} & -\dfrac{g''g}{(g')^2} & 0 & 0 \\ A & B & C & 0 \\ L - L_R & L_R & k_R - k & 1 \\ 0 & -L_R g' & -g & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{f''f}{(f')^2}[Bg - CL_R g'] + \frac{g''g}{(g')^2}Ag \\
&= L_R g'' g'' \frac{g}{g'}(k - k_R) + f'' \frac{f}{f'}\alpha_2 L_R (g')^2 + g'' \frac{g}{g'}(L_1 + L_2) f' < 0
\end{aligned}$$

が$k < k_R$のときに成立する。すなわち$k < k_R$の下では$|\Delta_K| < 0$となる。Appendix II により$|J| < 0$であるから$dR/d\bar{K} > 0$となる。よって

$$\frac{d}{d\bar{K}}\left|\frac{dX_2}{dX_1}\right| = (\alpha_2 - \alpha_1) R^{\alpha_2 - \alpha_1 - 1} \frac{dR}{d\bar{K}} < 0$$

が$\alpha_1 > \alpha_2$の下で成立する。すなわち$\bar{K}$を増加したとき、$X_1$を一定としたときの PPF の傾きの絶対値は減少する。PPF は原点方向に凸であるため$X_1/X_2$が同一となる PPF 上の点ではさらに傾きは緩やかになる。ここからさらに$\bar{K}/\bar{L}$を一定として、$\bar{K}$、$\bar{L}$を増やしたとき、$X_1/X_2$が不変の PPF 上の点では補助定理 3 によりさらに緩やかになる。よって補助定理 5 が成立する。

$\bar{K}/\bar{L}$が小さくなるように、$\bar{K}$、$\bar{L}$を増加させた場合についても、対称的に扱うことで同様にして示せる。