

教養部における数学教授方法についての考察

岡 田 朋 子

目的：

筆者は愛知学院大学の教養部の数学Ⅰ、数学Ⅱという授業を担当しています。

この授業は、宗教・宗教文化、歴史、国際文化、日本文化、心理、経営、国際経営、現代企業、法律、現代社会法などのいろいろな学部、学科の学生が受講している多人数クラスです。

以下では、理系ではない多人数クラスでどのように大学の数学を教えているか、また、どのような授業をしたら学生が授業内容を理解することができたか、また、どういうことを理解させるのが難しかったのかなどを紹介します。また、授業に対する学生の反応なども紹介して、どのような数学の授業が学生にとって有意義でわかりやすいのかを考察するのが目的です。

要約：

一方的で教科書通りに進める授業をやめて、学生にとって身近な話題を題材にしたり、実際に学生が自分の頭で考えたり問題を解いたりする時間を十分に与えたり、最近の数学の話題など数学や論理に興味を持つきっかけになるような問題を扱ったりすると、学生の反応がよく、静かに真剣に授業を聞くようになりました。

キーワード：

数の概念、集合、基数、有限集合、無限集合、無限級数、関数、微分積分、線形代数、行列、連立方程式、ゲーデルの不完全性定理

緒言：

数学Ⅰ、数学Ⅱの受講生のほとんどは中学校、高校のとき数学が苦手で、数学に対して苦手意識を持っています。分数の足し算やかけ算などの簡単な計算ができなかったり、中学校で習うはずのことがほとんどわかっていなかったりする学生も少なくありません。一方で、数学に興味があって大学の数学を理解したいという意欲のある学生もいます。

4年前、初めてこの大学で数学Ⅰを担当したときは、そのとき受け持っていた名古屋工業大学での微分積分学の授業を基に、それを簡単にしてわかりやすくしたような授業をしました。つまり、大学1年生向けの標準的な微分積分学のテキストを使い、そのテキストに沿って数学科のような「定義、定理、証明」という流れの授業をしました。その結果、ほとんどの学生が全く理解できない一方的な授業になってしまいました。

それで反省をして、その後はなるべく多くの学生にとって有意義な授業ができるように心がけ、「わからないことは言わない」、「難解な言葉は使わない」という方針の下で試行錯誤をくり返してきました。

最近では、毎回授業の最後に授業のまとめや質問、意見、要望、感想などを書いてもらっていて、それを基に次の授業計画を考えています。そして、なるべく学生が興味を持ちそうな話題を探し、少しでも数学がおもしろいと思ってもらえる内容を考えるようになりました。

以下で、去年度の数学の授業で具体的にどのような内容の授業をし、それに対する学生の反応や理解度はどうであったのかなどを書きます。

1. 数

最初の授業では、まず数学の基本となる数について説明しました。

まず、自然数をわからせるために、単位という概念について説明し、それがいくつ分あるかで個数という概念が生まれることを話し、その個数を表すものが自然数であるというような説明をしました。

学生が興味を持ったのは、単位を何にするかによって「ひとつ」が決まるということ、たとえば、お米1粒とご飯1杯が同じ「ひとつ」であることや、国や文化によって自然数に0を含めたり、含めなかったりすることです。日本では建物は地上も地下も1階から始まるのに対して、たとえばフランスなどの国では地上は0階から始まり地下は-1階から始まるというようにたいへん数学的であり、そういうことから自然数の定義が異なってくるということにも興味を示していました。

次に、自然数では足し算ができるが引き算ができないということや、資産-10万円などの負の表記ができないことの不便さを話し、自然数を引き算ができるように拡張したのが整数であるというように説明しました。そして、紀元前、紀元後のように0を中心に2方向考えることができる便利さをわかってもらいました。

さらに、整数においては分配する、分けるといった概念、つまり割り算ができないことを言い、整数を割り算ができるように拡張したのが有理数であると説明しました。 $3 \div 2$ をそのまま上下に書いた $\frac{3}{2}$ が分数表記で、1.5と表したのが小数表記であり、分数と小数は違う数ではなくある有理数を表す表記方法の違いであるということが学生には理解しづらかったようです。このため、分数を小数にしたり小数を分数にしたりする練習を何問かさせました。有理数とは分数で表される数であるならば有理数という言葉は不要なのではないか、という質問もありました。

そして、有理数を小数で表したときは有限小数または循環無限小数になることを言い、それ以外の小数、つまり、循環しない無限小数を無理数と呼び、有理数と無理数を合わせて実数と呼ぶと説明しました。

学生のレポートには下記のようなことが書かれていました：

- ・ 有理数や無理数の意味があいまいだったので、今日確認することができた。
- ・ 複素数という数は初めて知った。
- ・ わからない数学の授業とは別のベクトルでやっているのもおもしろかった。
- ・ 循環無限小数を分数に直す方法には驚かされました。
- ・ 自然数や整数など中学で学んだことなのに、あまり覚えてなくて新鮮な感じで学べた。国によって違うのがおもしろい。
- ・ 数というのは自然数でも実際に存在するのではなくて、人間が作り出した抽象的概念であることを理解した。実数というと実際にある数みたいで変な気がする。
- ・ 僕は19歳ですが、先生は僕が一何歳のときに生まれたのですか。よかったら整数で答えて下さい。

2. 個数（基数）

ふたつの個数が等しいというのは両者の間に1対1対応があることであるということをも自分で気付かせるために、教室にいる男子の人数と女子の人数はどちらが多いのか、または、等しいのかを一番簡単に調べる方法は何かということを考えてもらいました。何人かの学生に

聞いたら、ほとんどがそれぞれの人数を数えると答えました。そこで、男女ペアをつくってもらい、ひとりも余らなければ両者は同数で、男の子が余れば男の子の方が多くて、女の子が余れば女の子が多いと判断するのがもっとも早くて確実な方法ではないかというように提案し、個数が等しいというのは、ペアを過不足なくつくれることであるというように定義しました。

そして、そのように定義すると、(1, 2)、(2, 4)、(3, 6)、…というペアを考えることによって、自然数の個数とその一部である偶数の個数が等しくなるということを説明し、同様に、自然数の個数も整数の個数も有理数の個数も実は等しいのであるということを紹介しました。

学生に無限集合の不思議さをわかってもらおうとしましたが、おもしろいと感じる学生より難しくてよくわからないという学生の方が多かったように思います。想像しづらい世界なので、屁理屈のように感じる学生もいたようです。

学生のレポートには下記のようなことが書かれていました：

- ・ 有限と無限の言葉の意味がわからなかった。
- ・ 無限と言われただけでよくわからなくなってしまった。
- ・ 整数と自然数は圧倒的に整数の方が多いと思っていたが、同数であることがわかった。
- ・ 今までなんとなくやっていた数学が実は奥が深いということがわかった。
- ・ $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots = 1$ になるのが正方形の面積で示せるのは感動した。
それなのに、 $1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots = \infty$ なのは不思議だ。
- ・ $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ が計算順序によって0になったり1になったり1/2になったりするのがおもしろかった。
- ・ $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \dots = \pi/4$ とかは右辺が無理数なのに左辺は有理数しかない。
どんな変な無理数でもふつうの有理数の無限個の足し算で書けるのですか？
- ・ 無限だから計算できないと思っていたけど、考え方によっては計算できるのでびっくりした。

3. 計算練習

その後の授業のために簡単な計算練習の時間を設けました。

まず、四則演算の入り混じった計算や() がついた計算の計算順序を説明し、簡単な整数の計算問題を何問かやらせましたが、半数以上の学生が間違える問題も少なくありませんでした。

た。簡単な計算ミスが目立ち、計算順序を間違えることも多かったです。

次に、分数の割り算はどうして逆数をかけるのかということについて、ケーキを分配するなどの例を使って説明し、約分や通分の練習もしました。また、なぜ0で割ってはいけないかということも、 $2 \div 0$ 、 $0 \div 0$ をそれぞれ☆、★と置いて、 $2 = 0 \times ☆$ をみたすような☆は存在しない、 $0 = 0 \times ★$ をみたすような★は何でもいからであるというように具体的に説明しました。これらの理屈はほとんどの学生が納得したようでしたが、実際の分数の計算問題は多くの学生が間違えました。

こういった簡単な計算にも慣れていないせいで、数学を敬遠し難しく感じるという学生も多いということに気が付きました。なので、たとえばインド式の2けたの掛け算の暗算方法や割り算の暗算方法などを紹介し、まず計算に少し慣れてもらうようにしました。

学生のレポートには下記のようなことが書かれていました：

- ・ 計算問題で順番がわからなくなるときがある。
- ・ 簡単な計算を間違えて自分がいやになった。
- ・ 計算が苦手だということがわかったのもっと勉強したい。
- ・ 計算などは努力すれば解けるが、応用的な思考ができない。
- ・ 九九の9の段の10の位と1の位をたすと9になるのがおもしろかった。
- ・ 2けたの掛け算がこんなに簡単にできる方法があるなんておどろいた。これから使います。

4. 関数

関数とは何かから説明し、最終的には、1次関数、2次関数、3角関数、指数関数、対数関数などのグラフや、円や楕円などのグラフを描けるようになり、微分や積分の概念を理解することを目標としました。関数の定義においては、人にその母親を対応させるのや日本において既婚者にその配偶者を対応させるのは関数であるが、人にその子供を対応させるのやその友達を対応させるのは関数ではないというように、身近な例を使って説明しました。

学生は、平方根や3角比や対数などの定義を難しく感じたようです。たとえば、面積が2の正方形の1辺の長さや面積が1の正方形の対角線の長さは何かということを考えさせたりしながら、なるべく式を使わずに絵や図形を使って説明するように心がけました。

レポートを読むと、関数、平方根など中学校、高校で聞いたことのある数学の専門用語に対して難解なものであるという先入観を持っていて、そういった言葉を出すと敬遠して構えてし

まい、やっぱり難しいというように感じる傾向があるようです。それゆえに、絵や図形を使って概念を十分理解させたあと、言葉の定義をするようにしました。1次関数でも、傾きや切片などの言葉を出さず、具体的に点をプロットしてグラフを描いてもらって十分慣れてから、変化率などの言葉を出し、微分概念などを少しでも理解してもらえるように努めました。

学生のレポートには下記のようなことが書かれていました：

- ・ 関数は苦手です。平方完成がわからない。平方根は難しい。
- ・ 直線や放物線のグラフは忘れていて難しかった。もう一度やってほしい。
- ・ ルートのグラフは高校でやっていないので難しかった。
- ・ 今まであいまいに理解していた関数がわかった。
- ・ パラボラが放物線だということを知った。
- ・ たしかにお好み焼きをカットするときは、度よりラジアンの方がわかりやすいと思いました。ちなみに僕は $\pi/3$ ラジアンに切るのがちょうどいいと思います。
- ・ フェルマーの最終定理は聞いたことあって難しそうと思っていたが、3平方の定理と似ていて簡単だと思った。2乗なら解がたくさんあるのに3乗以上は全くないのは不思議だ。存在しないことを証明する方が難しいというのはその通りのような気がした。
- ・ 1回微分して+で体重が増加していても、2回微分して-だったら増加率は減っていることなので安心していい。
- ・ 先生の顔は黄金比ですか、白銀比ですか。
- ・ デカルトは考えていることがよくわからない。なぜ天井に止まった蠅を見て座標平面が思いつくのだろう。

5. 行列

まず、行列において、横の並びが行でたての並びが列であることを覚えさせるために、教室の椅子を行列の成分に見立てました。そして、第1行はどこか、(2, 3)成分はどこかなどというような練習をしました。学生は、最前「列」が第1「行」というような日常語とのずれがあることが不思議そうでした。

行列の計算で、特に掛け算は難しいので、その意味を理解させることに時間を使いました。具体的に、各自動車ディーラーの車種別販売台数の表や車種と価格の表を行列とみなして、その積が意味するものは何かということを考えさせ、どうして行列の積を考える意義があるのかということをおぼえてもらいました。和についても、具体的な表同士の足し算を抽象化したも

のが行列の足し算であるというように説明し、行列が応用のために生まれたものであるということ 강조했다.

また、行列の基本変形を使って連立1次方程式を解くときも、中学校で習ったはずの式変形による連立1次方程式の解き方を知らない、または忘れている学生もたくさんいるので、まずはそれを練習させてから、行列の基本変形を教えました。

学生のレポートには下記のようなことが書かれていました：

- ・ 最前列という言い方はおかしいと思いました。行列のできるラーメン屋の行列って列だけですか。
- ・ マトリックスが行列だとは知らなかった。
- ・ 映画館の座席の例がわかりやすかった。これからはA列ではなくてA行と言います。
- ・ 車には詳しくないのでよくわかりませんでした。
- ・ 行列は実は現実の何かを表していて、どうして足したり掛けたりするのがわかった。
- ・ 連立方程式の解き方を忘れていたのでわかりませんでした。
- ・ 連立方程式が行列だけで解けるのはすごいと思った。

6. 論理

論理的思考に慣れていない学生のために、身近な例を使って練習しました。例として使ったのが、自動車普通免許の学科試験の模擬問題で、たとえば、駐車余地6mという標識がある場所では、

「道路の幅が6m以上なければ、駐車をしてはいけない」

という文は正しいか、という問題です。これは、

「道路の幅が6m以上なければ、車の右側の幅は6m以上ない」

という事実と、駐車余地6mという標識がある場所では、

「車の右側の幅が6m以上なければ、駐車をしてはいけない」

という法令とから、3段論法によって正しいことを導いてほしいのですが、3段論法を説明したあとでも1割くらいの学生が問題の文は正しくないと解答していました。また、

「道路の曲がり角から5m以内の場所は、駐車禁止場所である」

という文は正しいか、という問題に対しても、

「道路の曲がり角から5m以内の場所は、駐停車禁止場所である」

という法令から、「駐車禁止であり、かつ、停車禁止である」のでももちろん「駐車禁止である」

のに、問題の文が正しくないと解答する学生が2割ほどいました。また、

「通行禁止の標識のある道路で、二輪車以外の自動車は通行してはならない」
という文は正しいか、という問題に対しても、

「通行禁止の標識のある道路で、すべての自動車は通行してはならない」
という法令から、もちろん二輪車以外の自動車も通行してはならないのに、問題の文が正しくないと解答する学生が半数近くいました。さらに、

「人間以外の動物は呼吸する」
という文が正しいということに納得ができなくて、授業後に質問に来る学生が数人いました。この文が正しくないとすると、

「人間以外の動物は呼吸しない」
ということになって、猫は呼吸しないことになると言ったらわかったようでした。

学生のレポートには下記のようなことが書かれていました：

- ・ ふだん何気なく考えていることにも法則があるのだと気付いた。
- ・ 日常にも数学がいっぱい出てくるんだなあと思った。言葉というのは論理なんだなあと思った。
- ・ ややこしくて訳がわからなくなった。
- ・ 自動車学校でおかしいと思っていたことが解決した。
- ・ AだからCとすぐに思ったように思えるけど、実はAならばB、BならばCというような段階を踏んでいるのだということがわかった。
- ・ ゲーデルの不完全性定理の本を買ったのでこれから読んでみます。
- ・ こういう話はおもしろい。またやって下さい。

結論：

学生がもっとも納得しなかったことのひとつは、

$$0.99999\cdots = 1$$

が正しいということです。

$$1 \div 3 = 0.33333\cdots$$

は納得できるのに、両辺を3倍しただけで右辺と左辺の間にはどうしても隙間がある気がして不思議な感じがするという学生が多かったのです。

また、たとえば、うそつきのパラドックス、

「クレタ人はうそつきである」と言ったクレタ人を紹介したり、

「この黒板に書いてあることはうそである」と黒板に書いてみたりしましたが、こういった問題には興味を示してくれました。そして、学生の反応がもっともよかったのは、

「この文には1という数字が（ ）個ある」の（ ）にはどんな数が入るか、という問題でした。

不思議に思ったり、自分の感覚に気付いたり、おもしろくて積極的に考えたいと思ったりするような、数学や論理的思考に興味を持つきっかけになるような問題を扱うと、学生は授業を真剣に受けるようになったと感じます。

最後に、理系選択ではなく数学が苦手である学生に対して、興味や関心を持たせることができた数学の授業内容を具体的にまとめます：

- ・ インドで0という概念が発見されたこと。自然数に0を入れるか入れないかが国や文化によって異なること。
- ・ 自然数と偶数が同数存在すること。
- ・ $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots = 1$,
- ・ $1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 + \dots = (1/2) \log 2$,
- ・ $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \dots = \pi/4$,
- ・ $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots = \pi^2/6$
- ・ $1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \dots = e$
- などの無限級数。
- ・ インド式の2けたの掛け算の暗算方法や割り算の暗算方法
- ・ 増加率の増加率という2階微分概念。
- ・ フェルマーの最終定理、リーマン予想など、一般に有名な数学の問題についての説明。
- ・ 行列において、行と列の日常語との違い。
- ・ 具体的な表を行列とみなしたときのその積が意味するものは何かということ。
- ・ 連立1次方程式が行列の簡単な変形だけで解けるということ。
- ・ 命題の真偽について多くの学生が勘違いしていることの指摘。
- ・ パラドックスやゲーデルの不完全性定理など論理学の問題

また、理系選択ではなく数学が苦手である学生に対しての教養の数学の教授方法で、効果的であったものをまとめます：

- ・ 数学の専門用語、難解な言葉はなるべく使わず、ゆっくり話すこと。
- ・ 問題を解かせたり計算させたりなど、学生が自分でペンをもって考える時間をつくること。
- ・ 理由や意味を理解しないまま、ただ解くだけの問題演習はさせないこと。
- ・ 式変形などで過程を省略しないこと。
- ・ 日常的な例や絵や図形を使って十分概念を説明してから定義や数式を出すこと。
- ・ 学生が書く質問、意見、要望、感想を考慮し、次の授業でなるべく取り入れること。

今学期までに感じたことは以上ですが、毎学期、またクラスによっても学生の様子や理解度は違ったりしますので、そのクラスの学生をよく観察しながら柔軟に対応し、なるべく多くの学生にとっての有意義でおもしろい授業内容をさがすように努めていくことが大切だと考えています。

参考文献

- [1] 「科学と方法—改訳」、ポアンカレ著 吉田洋一訳、岩波文庫（1953年）
- [2] 「高木貞治の数学教育論」、上垣渉、数学教育史研究第3号、19-23（2003年）