Cohen モデルにおける $\mathfrak{s}(I)$ と $\mathfrak{r}(\mathcal{I})$ の振る舞いについて

南　　　裕　明*

概要

F_σ イデアルによる商代数 $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$ における分離基数 $\mathfrak{s}(\mathcal{I})$ と非分離基数 $\mathfrak{r}(\mathcal{I})$ の Cohen 強制法での振る舞いを調べ，$\mathfrak{s}(\mathcal{I}) < \mathsf{cov}(\mathcal{M})$ や $\mathfrak{r}(\mathcal{I}) > \mathsf{non}(\mathcal{M})$ の相対無矛盾性を示す．これらは 2021 年度に国内研究で行った成果の一部である．

キーワード

強制法, Cohen 強制法, F_σ イデアル, 分離基数, 非分離基数

1　導入

自然数の部分集合全体を有限集合で割った $\mathcal{P}(\omega)/\mathsf{fin}$ の構造は集合論において詳しく研究されている．ここで $[A],[B] \in \mathcal{P}(\omega)/\mathsf{fin}$ にたいして $[A] \leq [B]$ を $A \setminus B$ が有限のときのことと定める．このとき $(\mathcal{P}(\omega)/\mathsf{fin})$ の組み合わせ論的な性質は基数不変量として表現され，それらのあいだの関係は van Douwen の図式として表されて長いあいだ研究されてきた．

近年，$(\mathcal{P}(\omega), \leq)$ と似た構造と van Douwen の図式にあらわれる基数不変量と類似な基数不変量が定義され分析されている．ここでは $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$ という構造の基数不変量を分析する．

1.1　準備と定義

ここでは関連する概念を紹介する．この論文では標準的な集合論の慣用と記号を使う．ω^ω は自然数全体 ω から自然数全体 ω への関数全体を表す．$\omega^{<\omega}$ で自然数から ω への関数の全てを表す．無限集合 X にたいして $[X]^\omega$ と $[X]^{<\omega}$ はそれぞれ X の可算無限集合全体と X の有限集合全体を表す．

$A, B \subset \omega$ にたいして A は B に **ほとんど含まれる** ($A \subset^* B$) とは $A \setminus B$ が有限集合であるときのことをいう．$A, B \subset \omega$ にたいして A と B が**ほとんど等しい** ($A =^* B$) とは $A \subset^* B$ かつ $B \subset^* A$ が成り立つときのことをいう．$\mathcal{P}(\omega)/\mathsf{fin}$ とは $=^*$ によって導入された同値類に, $[A] \leq [B]$ という順序を $A \subset^* B$ によって定めたものである，ただし $[A]$ とは A の同値類のことである．以降，簡単のために同値類 $(\mathcal{P}(\omega)/\mathsf{fin}, \leq)$ を考える代わりに $([\omega]^\omega, \subset^*)$ という構造を扱う．

* 愛知学院大学教養部数学・統計学教室

$A, B \in [\omega]^\omega$ にたいして A が B を**分離する**とは $|A \cap B| = |B \setminus A| = \omega$ となるときのことをいう．$\mathcal{S} \subset [\omega]^\omega$ が**分離族**であるとは，任意の $B \in [\omega]^\omega$ にたいして $A \in \mathcal{S}$ で A が B を分離するものがあるときのことをいう．**分離基数** $\mathfrak{s}$ は分離族の最小濃度のことである．

$\mathcal{R} \subset [\omega]^\omega$ が**非分離族**であるとはどんな $A \in [\omega]^\omega$ を選んでも全ての $\mathcal{R}$ の要素を分離できないときのことをいう．言い換えると任意の $A \in [\omega]^\omega$ にたいして $B \in \mathcal{R}$ で $|A \cap B| < \omega$ または $|B \setminus A| < \omega$ となるものが存在する．**非分離基数** $\mathfrak{r}$ は非分離族の最小濃度のことである．

基数不変量を分析するさいに Cichoń の図式と呼ばれる図式とそこにあらわれる古典的な基数不変量が重要になる．まず Cichoń の図式にあらわれる基数不変量を導入する．

$f, g \in \omega^\omega$ にたいして $f \leq^* g$ を有限個を除いて全ての $n \in \omega$ で $f(n) \leq g(n)$ が成り立つことで定める．このとき $\mathcal{G} \subset \omega^\omega$ が**支配的な集合族**であるとは任意の $f \in \omega^\omega$ にたいして $g \in \mathcal{G}$ で $f \leq^* g$ となるものが存在するときのことをいう．このとき**支配基数** $\mathfrak{d}$ は支配的な集合族の最小濃度のことである．また $\mathcal{F} \subset \omega^\omega$ が**非有界集合族**であるとは任意の $g \in \omega^\omega$ にたいして $f \in \mathcal{F}$ で $f \leq^* g$ とならないものが存在するときのことをいう．このとき**非有界基数** $\mathfrak{b}$ は非有界集合族の最小濃度のことである．

実数 $\mathbb{R}$ 上のイデアル $\mathcal{J}$ にたいして次の 4 つの基数がよく使われる．

$$\mathsf{add}(\mathcal{J}) = \min\{|\mathcal{H}| : \mathcal{H} \subset \mathcal{J} \text{ かつ任意の } J \in \mathcal{J} \text{ にたいして } H \in \mathcal{H} \text{ で } H \not\subset J \text{ となるものが存在する }\}.$$
$$\mathsf{non}(\mathcal{J}) = \min\{|\mathcal{X}| : \mathcal{X} \subset \mathbb{R} \text{ かつ任意の } J \in \mathcal{J} \text{ にたいして } x \in \mathcal{X} \text{ で } x \notin J \text{ となるものが存在する }\}.$$
$$\mathsf{cov}(\mathcal{J}) = \min\{|\mathcal{H}| : \mathcal{H} \subset \mathcal{J} \text{ かつ任意の } x \in \mathbb{R} \text{ にたいして } J \in \mathcal{H} \text{ で } x \in \mathcal{J} \text{ となるものが存在する }\}.$$
$$\mathsf{cof}(\mathcal{J}) = \min\{|\mathcal{H}| : \mathcal{H} \subset \mathcal{J} \text{ かつ任意の } J \in \mathcal{J} \text{ にたいして } H \in \mathcal{H} \text{ で } J \subset H \text{ となるものが存在する }\}.$$

特に $\mathcal{J}$ が痩集合イデアル $\mathcal{M}$ や零集合イデアル $\mathcal{N}$ のときが基数不変量の分析で重要となる．

これらの基数不変量のあいだには次の関係がある．($\kappa \to \lambda$ は $\kappa \leq \lambda$ が ZFC で証明可能を意味する)

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{cof}(\mathcal{N}) \\
 & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & \\
\mathsf{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[r] & \mathsf{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathsf{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

この図式は *Cichoń* **の図式**と呼ばれる．

$\mathfrak{r}$ と $\mathfrak{s}$ は古典的な基数不変量と次のような関係がある．

命題 1.1. $\mathfrak{r} \geq \mathsf{cov}(\mathcal{M}), \mathsf{cov}(\mathcal{N}), \mathfrak{b}$. $\mathfrak{s} \leq \mathsf{non}(\mathcal{M}), \mathsf{non}(\mathcal{N}), \mathfrak{d}$.

図示すると次のようになる．($\kappa \to \lambda$ は $\kappa \leq \lambda$ が ZFC で証明可能を意味する)

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathfrak{r} & & & \\
\mathsf{cov}(\mathcal{N}) \arrow[rr] \arrow[urrr] & & \mathsf{non}(\mathcal{M}) \arrow[rr] & & \mathsf{cof}(\mathcal{M}) \arrow[rr] & & \mathsf{cof}(\mathcal{N}) \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[rr] \arrow[uur] & & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\mathsf{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[rr] & & \mathsf{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[rr] & & \mathsf{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[rr] \arrow[uuul] & & \mathsf{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \\
 & & & \mathfrak{s} \arrow[uuul] \arrow[uur] \arrow[urrr] & & &
\end{tikzcd}$$

さらに $\mathfrak{s}$ と $\mathsf{cov}(\mathcal{M})$ の関係は決定できない．$\mathfrak{s} < \mathsf{cov}(\mathcal{M})$ が Cohen モデルで成り立ち，$\mathfrak{s} > \mathsf{cov}(\mathcal{M})$ が Mathias モデルで成り立つ．同様に $\mathfrak{r} > \mathsf{non}(\mathcal{M})$ をみたすモデル (Cohen モデル) と $\mathfrak{r} < \mathsf{non}(\mathcal{M})$ をみたすモデル [BJ, Model 7.5.9] が存在する．

与えられた集合 X の部分集合族 $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ が X 上の**イデアル**であるとは以下をみたすときのことをいう．

(1) $A, B \in \mathcal{I}$ ならば $A \cup B \in \mathcal{I}$.
(2) $A, B \subset X$, $A \subset B$ で $B \in \mathcal{I}$ ならば $A \in \mathcal{I}$.
(3) $X \notin \mathcal{I}$.

イデアル $\mathcal{I}$ が与えられたとき $\mathcal{I}^+$ は X の部分集合で $\mathcal{I}$ の要素でないもの全体を表す．

このとき ω 上のイデアル $\mathcal{I}$ にたいして $\mathcal{P}(\omega)/\mathsf{fin}$ 同様に $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$ という構造を考えることができる．$A, B \in \mathcal{I}^+$ にたいして $A \subset_{\mathcal{I}} B$ を $A \setminus B \in \mathcal{I}$ で定める．$A, B \in \mathcal{I}^+$ にたいして $A =_{\mathcal{I}} B$ は $A \setminus B \in \mathcal{I}$ かつ $B \setminus A \in \mathcal{I}$ で定める．$\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$ は $=_{\mathcal{I}}$ による同値類に順序 $[A] \leq_{\mathcal{I}} [B]_{\mathcal{I}}$ を $A \subset_{\mathcal{I}} B$ によって定めたものである．ただし $[A]$ は A の $=_{\mathcal{I}}$ による同値類である．$\mathcal{P}(\omega)/\mathsf{fin}$ 同様に，簡単のために $(\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}, \leq_{\mathcal{I}})$ を考えるかわりに $(\mathcal{I}^+, \subset_{\mathcal{I}})$ を扱う．

$[\omega]^\omega$ のときと同様に $\mathcal{I}^+$ にも分離族，非分離族が導入できる．$A, B \in \mathcal{I}^+$ にたいして A が B を $\mathcal{I}$-**分離**するとは $A \cap B \in \mathcal{I}^+$ かつ $B \setminus A \in \mathcal{I}^+$ となるときのことをいう．$\mathcal{S} \subset \mathcal{I}^+$ が $\mathcal{I}$-**分離族**であるとは，任意の $B \in \mathcal{I}^+$ にたいして $A \in \mathcal{S}$ で A が B を $\mathcal{I}$-分離するものがあるときのことをいう．$\mathcal{I}$-**分離基数** $\mathfrak{s}(\mathcal{I})$ は $\mathcal{I}$-分離族の最小濃度のことである．$\mathcal{R} \subset \mathcal{I}^+$ が $\mathcal{I}$-**非分離族**であるとはどの $A \in \mathcal{I}^+$ を選んでも $B \in \mathcal{R}$ で A は B を $\mathcal{I}$-分離できないものが存在するときのことをいう．すなわち $B \in \mathcal{R}$ で $A \cap B \in \mathcal{I}$ または $A \setminus B \in \mathcal{I}$ が成り立つものが存在する．$\mathcal{I}$-**非分離基数** $\mathfrak{r}(\mathcal{I})$ は $\mathcal{I}$-非分離族の最小濃度のことである．

この先，主に X として可算集合を考える．このため扱うイデアルは ω 上のイデアルと見なすことができる．さらに $\mathcal{I}$ はイデアル fin を含むものとする．ここで fin は ω の有限集合全てからなる集合のことである．

$\mathcal{P}(\omega)$ の位相は ω の部分集合をその特徴関数と同一視したものから導かれるものとする．ここで 2^ω は積位相が入っているものとする．このときイデアル $\mathcal{I}$ が Borel, F_σ, 解析集合であるとはそれぞれがこの位相において Borel, F_σ, 解析集合であるときのことをいう．

典型的な F_σ イデアルとして summable イデアルがある．イデアル $\mathcal{I}$ が *summable* であるとは，ある関数 $p : \omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して，$\displaystyle\sum_{n \in \omega} p(n) = \infty$ となり

$$\mathcal{I} = \{A \subset \omega : \sum_{n \in A} p(n) < \infty\}$$

をみたすときのことをいう．ここで $\mathbb{R}_{\geq 0}$ は非負の実数全体の集合である．

この論文ではイデアル $\mathcal{I}$ が F_σ イデアルであるときの $\mathfrak{r}(\mathcal{I})$, $\mathfrak{s}(\mathcal{I})$ と $\mathsf{cov}(\mathcal{M})$, $\mathsf{non}(\mathcal{M})$ の関係を調べる．イデアルを制限するのは次の性質があるためである．

命題 1.2. $\mathcal{I}$ が F_σ イデアルであるとき，$\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$ は σ-閉である．

このことより $\mathcal{I}$ が F_σ-イデアルのとき $\mathfrak{s}(\mathcal{I}) \geq \omega_1$ となる．なお $\mathfrak{s}$ や $\mathfrak{r}$ との関係は次のことが知られている．

定理 1.1. *[Brendle]* 任意の *summable* イデアル $\mathcal{I}$ にたいして $\mathfrak{s}(\mathcal{I}) < \mathfrak{s}$ は ZFC と相対無矛盾である．同様に $\mathfrak{r}(\mathcal{I}) > \mathfrak{r}$ は ZFC と相対無矛盾である．

$\mathfrak{s}$ と $\mathfrak{s}(\mathcal{I})$, $\mathfrak{r}$ と $\mathfrak{r}(\mathcal{I})$ はそれぞれ異なるため，先ほどの図式にあらわれた古典的な基数不変量との関係を調べることが重要になってくる．

2　$\mathfrak{s}(\mathcal{I})$, $\mathfrak{r}(\mathcal{I})$ と古典的な基数不変量の関係

Mazur による F_σ-イデアルの特徴付けを導入する．

集合 X 上の *submeasure* φ とは関数 $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ で以下の 3 つの条件をみたすものである：

(1) $\varphi(\emptyset) = 0$.

(2) $A \subset B$ ならば $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ かつ

(3) $\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$.

つまらない場合を避けるために，さらに次の条件をみたすものとする:

(4) 任意の X の有限集合 F にたいして $\varphi(F) < \infty$.

ω 上の submeasure φ が**下半連続な** *submeasure* であるとは, $\varphi(A) = \lim_{n \to \infty} \varphi(A \cap n)$ をみたすときのことをいう．φ が下半連続な submesure であるならば $\mathsf{Fin}(\varphi) = \{A \subset \omega : \varphi(A) < \omega\}$ はイデアルとなる．この下半連続な submeasure を使って, Mazur は以下のような F_σ イデアルの特徴付けを与えた.

定理 2.1. *[Mazur] 以下は同値である:*

(1) $\mathcal{I}$ は F_σ イデアル.

(2) ある下半連続 *submeasure* φ が存在して $\mathcal{I} = \mathsf{Fin}(\mathcal{I})$.

この定理から $\mathfrak{s}$ と $\mathfrak{s}(\mathcal{I})$, $\mathfrak{r}$ と $\mathfrak{r}(\mathcal{I})$ は命題 1.1 とよく似た性質が成り立つことがわかる.

命題 2.1. *(1) [Brendle]* F_σ イデアル $\mathcal{I}$ にたいして, $\mathfrak{s}(\mathcal{I}) \leq \mathfrak{d}$.

(2) F_σ イデアル $\mathcal{I}$ にたいして, $\mathfrak{s}(\mathcal{I}) \leq \mathsf{non}(\mathcal{M})$. 同様に $\mathfrak{r}(\mathcal{I}) \geq \mathsf{cov}(\mathcal{M})$.

ただし， $\mathsf{non}(\mathcal{N})$ や $\mathsf{cov}(\mathcal{N})$ との関係で同様の結果が成り立つかどうかはまだわかっていない.

図示すると次のようになる ($\kappa \to \lambda$ は $\kappa \leq \lambda$ が ZFC で証明可能であることを表す．点線矢印は不明を表している).

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathfrak{r}(\mathcal{I}) & & \\
\mathsf{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[urr, dotted, "?"] & \mathsf{non}(\mathcal{M}) \arrow[rr] & & \mathsf{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{cof}(\mathcal{N}) \\
 & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[rr] \arrow[uur] & & \mathfrak{d} \arrow[u] & \\
\mathsf{add}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathsf{add}(\mathcal{M}) \arrow[rr] \arrow[u] & & \mathsf{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[uuul] & \mathsf{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \\
 & & \mathfrak{s}(\mathcal{I}) \arrow[uuul] \arrow[uur] \arrow[urr, dotted, "?"] & &
\end{tikzcd}$$

3 $\mathcal{I}$ が F_σ イデアルであるときの $\mathfrak{s}(\mathcal{I}) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ と $\mathfrak{r}(\mathcal{I}) > \mathrm{non}(\mathcal{M})$ の証明

定理 3.1. $\mathcal{I}$ を F_σ イデアルとすると $\mathfrak{s}(\mathcal{I}) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ は ZFC と相対無矛盾である．同様に $\mathfrak{r}(\mathcal{I}) > \mathrm{non}(\mathcal{M})$ は ZFC と相対無矛盾である．

証明は次の補題から導かれる．

補題 3.1. $\dot{X}$ を $\mathbb{C}$-名前で $\Vdash_{\mathbb{C}} \dot{X} \in \mathcal{I}^+$ となるものとする．このとき $\mathcal{I}^+$ の要素の可算列 $\langle X_n : n \in \omega\rangle$ で $Y \in \mathcal{I}^+$ で Y が全ての $n \in \omega$ にたいして X_n を $\mathcal{I}$-分離するのであれば

$$\Vdash_{\mathbb{C}} \text{“}Y \text{ は } \dot{X} \text{ を } \mathcal{I}\text{-分離する”}$$

補題 *3.1* の証明. $\mathcal{I}$ は F_σ イデアルであることから下半連続な submeasure φ で $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}(\varphi)$ をみたすものが存在する．Cohen 強制法 $\mathbb{C}$ は可算なので $\{p_n : n \in \omega\}$ と枚挙ができる．各 $n \in \omega$ にたいして $\mathbb{C}$ の下降列 $\langle p_n^i : i \in \omega\rangle$, 自然数の上昇列 k_i と $X_n \in \mathcal{I}^+$ を次のように定める:

(1) $p_n^0 = p_n$ で各 $i \in \omega$ にたいして $p_n^i \geq p_n^{i+1}$.
(2) $p_n^i \Vdash$ “$\dot{X} \cap k_i = X_n \cap k_i$ かつ $\varphi(\dot{X} \cap k_i) \geq i$”.

$Y \in \mathcal{I}^+$ が任意の $n \in \omega$ にたいして X_n を $\mathcal{I}$-分離したとする, すなわち全ての $n \in \omega$ にたいして $Y \cap X_n \in \mathcal{I}^+$ かつ $X_n \setminus Y \in \mathcal{I}^+$, これは Mazur の特徴付けからさらに $\varphi(Y \cap X_n) = \varphi(X_n \setminus Y) = \infty$ だといえる．

このとき $\Vdash$ “Y は $\dot{X}$ を $\mathcal{I}$-分離する” を示す．これを示すには任意の $p \in \mathbb{C}$ と任意の $m \in \omega$ にたいして $r \leq p$ かつ $r \Vdash$ “$\varphi(\dot{X} \cap Y) \geq m$ かつ $\varphi(\dot{X} \setminus Y) \geq m$” となる r が存在することを示せばよい．

$p \in \mathbb{C}$ と $m \in \omega$ が与えられたとき $\{p_n : n \in \omega\}$ が $\mathbb{C}$ の枚挙であることから $p = p_n$ となる $n \in \omega$ がある．Y が X_n を $\mathcal{I}$-分離することから $\varphi(Y \cap X_n) = \varphi(X_n \setminus Y) = \infty$ となるので, φ が下半連続であることから十分大きな $i \in \omega$ をとれば $\varphi(X_n \cap Y \cap k_i) \geq m$ かつ $\varphi(X_n \setminus Y \cap k_i) \geq m$. ここで $p_n^i \leq p_n$ は $p_n^i \Vdash$ “$\dot{X} \cap k_i = X_n \cap k_i$” となるので $p_n^i \Vdash$ “$\varphi(\dot{X} \cap Y \cap k_i) \geq m$ かつ $\varphi(\dot{X} \setminus Y \cap k_i) \geq m$”. したがって $r \leq p$ かつ $r \Vdash$ “$\varphi(\dot{X} \cap Y) \geq m$ かつ $\varphi(\dot{X} \setminus Y) \geq m$” となる r が存在する．よって補題が成り立つ． □

定理 *3.1* の証明. 有限台反復強制法の保存定理から [BJ] 補題は κ 回の有限台反復強制法でも成り立つ (κ は任意の基数). 基礎モデル V では連続体仮説が成立すると仮定し, $\kappa > \omega_1$ の正則基数とすると κ 回の有限台反復強制法 $\mathbb{C}_\kappa$ による拡大 $V^{\mathbb{C}_\kappa}$ を考えると $V^{\mathbb{C}_\kappa} \models \mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \kappa$ となる [BJ]. 補題と保存定理から $(\mathcal{I}^+)^V$ 集合が $(\mathcal{I}^+)^{V^{\mathbb{C}_\kappa}}$ の要素を $\mathcal{I}$-分離するので $V^{\mathbb{C}_\kappa} \models \mathfrak{s}(\mathcal{I}) = \omega_1$. あわせて $\mathfrak{s}(\mathcal{I}) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ の相対無矛盾性がいえる．

$\mathfrak{r}(\mathcal{I}) > \mathrm{non}(\mathcal{M})$ の相対無矛盾性を示す．基礎モデル V はマーチンの公理 MA をみたして連続体濃度 $\mathfrak{c}$ を $\kappa > \omega_1$ とする．このとき $\mathfrak{r}(\mathcal{I}) = \mathfrak{c} = \kappa$ である．ω_1 回の Cohen 強制法の有限台反復強制法 $\mathbb{C}_{\omega_1}$ による拡大 $V^{\mathbb{C}_{\omega_1}}$ を考えると $V^{\mathbb{C}_{\omega_1}} \models \mathrm{non}(\mathcal{M}) = \omega_1$. 補題と保存定理から各 $\dot{X} \in (\mathcal{I})^{V^{\mathbb{C}_{\omega_1}}}$ にたいして $\{X_n : n \in \omega\} \in V$ で $Y \in V$ が任意の $n \in \omega$ にたいして X_n を $\mathcal{I}$-分離するなら, Y は $\dot{X}$ を $\mathcal{I}$-分離する．$V^{\mathbb{C}_{\omega_1}}$ で $\mathcal{R} \subset \mathcal{I}^+$ が $|\mathcal{R}| < \kappa$ をみたすなら, $\mathcal{R}' = \bigcup\{\{X_n : n \in \omega\} : \dot{X} \in \mathcal{R}$ で $\{X_n : n \in \omega\}$ は $\dot{X}$ にたいして補題をみたす $\}$ とすると $\mathcal{R}' \in V$ で $|\mathcal{R}'| < \kappa$. $V \models \mathfrak{r}(\mathcal{I}) = \mathfrak{c} = \kappa$ より $\mathcal{R}'$ は $\mathcal{I}$-分離基数ではないのである $Y \in V$ で全ての $\mathcal{R}'$ の要素を $\mathcal{I}$-分離できる．すると保存定理と補題から Y は $\dot{X} \in \mathcal{R}$ の要素を全て $\mathcal{I}$-分離できるので $\mathcal{R}$ は $\mathcal{I}$-非分離族ではない．以上から $V^{\mathbb{C}_{\omega_1}} \models \mathfrak{r}(\mathcal{I}) = \mathfrak{c} = \kappa$ となるので $\mathfrak{r}(\mathcal{I}) > \mathrm{non}(\mathcal{M})$ の相対無矛盾性がいえる． □

参考文献

[BJ] Tomek Bartoszyński and Haim Judah. Set theory on the structure of the real line. A. K. Peters 1995.

[Brendle] Jörg Brendle. Cardinal invariants of analytic quotients. `http://www.logic.univie.ac.at/2009/esi/pdf/brendle.pdf`

[Mazur] Krzysztof Mazur F_σ-ideals and $\omega_1\omega_1^*$-gaps in the boolean algebra $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$. Fundamenta Mathematicae, 138(2):103-111, 1991.