愛知学院大学心理学部紀要　第1巻（創刊号）(9–17)（2023）

ω 係数の変異形について
——階層的因子分析に基づく信頼性係数およびその利用に関する議論のレビュー——

小 野 島　　昂　　洋*

近年の α 係数の誤用に関する議論に伴い，因子分析モデルに基づく信頼性係数である ω 係数への注目が高まっている．ω 係数にはいくつかの異なる計算式があるが，それらの中で適切なものをどのように選ぶべきかについての議論は十分でない．この状況は，応用研究者にとってこの係数を利用しづらくしている．本研究の目的は，応用研究者がこの係数を報告する際の留意点を得ることである．そのために McDonald の ω の階層的因子分析に基づく発展およびこの係数の利用に関する議論に焦点を当ててレビューを行った．その結果，信頼性係数の報告の際には，1）測定モデルを十分に検討すること，2）どの ω の変異形が報告されているのかを明示すること，3）複数の信頼性係数を報告することの3点に留意する必要があることが明らかとなった．

キーワード：信頼性，ω 係数，因子分析

Ⅰ．はじめに

行動科学や社会科学など実証的なデータに基づく研究領域において測定されたデータがどの程度信頼できるかは極めて重要な問題である．観測値の分散と真値の分散の比として定義される信頼性は，もとは誤差の混入により希薄化した相関係数を修正する目的で Spearman（1904）によって導入され, Spearman（1910）で正式な定義を与えられた後，多くの研究領域において100年以上に亘って用いられている．

直接観察できない潜在変数を検討の対象とすることが多い心理学では心理尺度が日々開発されているが，信頼性を検討することは尺度開発の際の標準的な手続きの一つである．信頼性の指標である信頼性係数には様々なものが提案されており，その中でも最も広く使われているのは Cronbach の α である（Cronbach, 1951）．Cronbach の α は計算も容易であるため，提案されて以来長い間心理学研究において広く使われてきたが，近年では問題点が多く指摘されるようになり（Cortina, 1993; Schmitt, 1996; Sijtsma, 2009），その代替案として因子分析や構造方程式モデリングを用いた「モデルに基づく信頼性（model-based reliability）」の使用が推奨されるようになっている（Bentler, 2009; Raykov & Shrout, 2002）．モデルに基づく信頼性係数のうちの一つが McDonald によって提唱された ω 係数である（McDonald, 1978, 1985, 1999）．後に述べるように ω には α と比較していくつかの利点もあることから，近年ではこの係数の利用を推奨する主張も多い（e.g., McNeish, 2018; Revelle & Condon, 2019）．

しかしながら ω 係数を適切に利用するためにはいくつか問題となる状況が生じている．その一つは，ω 係数の定義にはいくつかの変異形があり，それぞれの意味する内容や使用に適した場面が異なっていることである．次節で見ていくように ω は，もとは1次元の因子分析モデルに基づき考案されたが，後に階層的因子分析を用いていくつかの変異形が定義されるようになった．異なる定義の ω が存在しているにも拘らず，尺度開発などの場面では単に ω と表記されて報告されていることも多く，読み手にとってはどの定義の ω が用いられているかの判断がつかず信頼性の評価が不可能な場合がある．また別の問題として，方法論の専門家でない応用研究者が尺度開発の際にどの ω 係数を報告するべきかの判断に迷う場面も生じるだろう．

これらの問題の原因の一端には，ω 係数の変異形に

＊愛知学院大学心理学部心理学科
（連絡先）〒470–0195 愛知県日進市岩崎町阿良池12　E-mail: onoshima.t@gmail.com

ついて解説している文献や係数の報告に関する十分な議論がないことが挙げられるだろう．岡田（2011）では ω 係数の変異形である ω_h と ω_t を紹介するとともにシミュレーションを用いて他の信頼性係数との性能の比較が行われているが，その使い分けに関する議論が十分になされている訳ではない．尺度の作成者が ω 係数を適切に報告し，また利用者がそれを評価するためには, 係数の持つ意味の正確な理解が不可欠である．

これらを念頭におき本稿は，ω 係数の変異形を整理し，ω 係数の報告の際の留意点をまとめることを目的とする．まず McDonald による ω の定義と階層的因子分析を用いたその発展形を整理する．続いて，尺度作成における信頼性係数の報告を念頭に α との関連や ω の報告に関する議論を紹介し，この係数の報告における留意点をまとめる．

Ⅱ．McDonald によるωの定義とその変異形

本章では McDonald によって定義された ω 係数およびその変異形を検討する．ω 係数は因子分析モデルに基づき考案された信頼性係数であるため，まず本稿に必要な範囲で因子分析モデルについて確認しておく．

m 個の項目からなる尺度が 1 つの共通因子で説明されるとする．これは 1 因子モデル，一般因子モデル，Spearman モデルなどと呼ばれている．項目 j の観測変数を X_j としたとき，因子分析モデルは共通因子を F，項目 j の独自因子を E_j，切片項を 0 とすると

$$X_j = \lambda_j F + E_j \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

と表される．ここで λ_j は j 番目の項目の因子負荷量である．因子分析モデルでは，すべての独自因子と共通因子が無相関であること，および異なる独自因子はお互いに無相関であることが仮定される．潜在変数である共通因子のスケールを決めるために，F は期待値が 0 で分散は 1 であることを想定する．

因子分析モデルの仮定から観測変数の分散は $\mathrm{Var}(X_j) = \lambda_j^2 + \psi_j^2$ と表せる．ここで ψ_j^2 は j 番目の項目の独自分散である．個人の尺度の総点を $X = \sum_{j=1}^{m} X_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F + \sum_{j=1}^{m} E_j$ とすると, $\mathrm{Var}(X) = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\right)^2 + \sum \psi_j^2$ である．したがって尺度の総点の分散は，共通因子によって説明される部分とそうでない部分に分解されることとなる．これらは母集団におけるモデルのパラメータで表されているが，データ分析の際には標本データからこれらの値を推定することとなる．

1．McDonald によるωの定義

ω 係数は McDonald が提案したため，McDonald の ω とも呼ばれることがあるが，その最初の検討は一般化可能性理論の枠組みで McDonald（1978）によって行われ，McDonald（1985, 1999）では因子分析とテスト理論との関連において説明が与えられている．

ω 係数は，古典的テスト理論における信頼性の真値による分散の部分を尺度項目に共通な因子による分散に置き換えたものである．尺度の総点を X，真値の総点を T，誤差の総点を E としたときに，古典的テスト理論では，その分散の比

$$\rho = \frac{\mathrm{Var}(T)}{\mathrm{Var}(X)} = \frac{\mathrm{Var}(T)}{\mathrm{Var}(T) + \mathrm{Var}(E)} \tag{2}$$

によって信頼性を定義している．因子分析モデルに基づく信頼性係数の ω は，項目が 1 つの因子によって説明される同種（homogeneous）の項目群である場合に，（2）式における真値の分散を共通因子による分散に置き換えることで定義される．すなわち尺度の総点の信頼性は

$$\omega = \frac{\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\right)^2}{\mathrm{Var}(X)} \tag{3}$$

である（McDonald, 1999, p. 89, Eq. 6.20a）．また因子負荷量の代わりに項目の独自分散を用いて

$$\omega = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{m} \psi_j^2}{\mathrm{Var}(X)} \tag{4}$$

のように表すこともできる（McDonald,1999, p. 89, Eq. 6.21）．

ω 係数は尺度の総点の分散と共通因子によって生じる分散の比であるが，同時に（1）尺度の総点と共通因子得点の相関の 2 乗，（2） 1 因子モデルにおいて，因子負荷量の合計および独自分散の合計が等しい 2 つの尺度の総点 X と X' の相関，（3）尺度に用いられた m 個の項目の総点と，その m 個の項目を下位集合に含む無限に多い項目集合の相関係数の 2 乗，としても説明される（McDonald, 1999, pp. 89–90）．

1 点目は共通因子と独自因子が直交しているという仮定から

$$\mathrm{Cor}(X, F) = \frac{\mathrm{Cov}(X, F)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(F)}} = \frac{\mathrm{Cov}\left(\left(\sum \lambda_j\right) F, F\right) + \mathrm{Cov}\left(\sum E_j, F\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$$
$$= \frac{\sum \lambda_j}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$$

となるため，その 2 乗は（3）式に一致する．決定係数とのアナロジーから，ω 係数は尺度の総点の分散の内，因子の変動によって説明される割合を意味していると解釈できる．

2 点目について，同じ共通因子 F を測定する X とは別の n 個の項目を考える．項目 k の観測得点を X'_k とすると，その総点は $X' = \sum_{k=1}^{n} X'_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k F + \sum_{k=1}^{n} E'_k$ と表せる．ここで 2 つの尺度の総点の相関係数

$$\mathrm{Cor}(X, X') = \frac{\mathrm{Cov}(X, X')}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(X')}}$$

を考えると，因子負荷量および独自分散についての仮定より $\mathrm{Var}(X) = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\right)^2 + \sum_{j=1}^{m} \psi_j^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda'_k\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \psi'^2_k = \mathrm{Var}(X')$ であるため，その分母は $\mathrm{Var}(X)$ となる．分子については

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, X') &= \mathrm{Cov}\left(\sum\lambda_j F + \sum E_j, \sum\lambda'_k F + \sum E'_k\right)\\ &= \mathrm{Cov}(\sum\lambda_j F, \sum\lambda'_k F) + \mathrm{Cov}(\sum\lambda_j F, \sum E'_k)\\ &\quad + \mathrm{Cov}(\sum E_j, \sum\lambda'_k F) + \mathrm{Cov}(\sum E_j, \sum E'_k)\end{aligned}$$

となり，因子分析モデルの仮定より最右辺の 2 項目以降は 0 となるため $\sum\lambda_j = \sum\lambda'_{k'}$ より $\mathrm{Cov}(X, X') = \left(\sum\lambda_j\right)^2$ となり（3）式が得られる．

3 点目は，ある行動領域が共通因子モデルで記述された場合の一般化可能性係数（generalizability coefficient）を導出するという目的で McDonald（1978）において検討された特性である．尺度の開発において，ある尺度に用いられた m 個の項目がより大きな項目集合から得られたと考える場合にその m 個の項目において得られた結果が同種の行動領域にどの程度一般化可能かに関心が置かれることがある．この一般化の程度を示す値は一般化可能性係数と呼ばれている（一般化可能係数を含む一般化可能性理論については Brennan（2001）を参照されたい）．この意味で ω は一般化可能性の指標としても扱われる．

McDonald（1985, 1999）は，1 因子モデルが当てはまらない場合の ω についても言及している．（4）式を用いることで，多因子モデルを当てはめた尺度の総点の信頼性を計算すること自体は可能であるが，その有用性について McDonald（1985）は，このような異種（heterogeneous）の部分の合計としての尺度得点を構成することには「疑問の余地がある（questionable, p. 218）」と述べている．しかしながら，すべての項目が 1 因子のみで説明されるモデルというのも理想化されすぎているとし，このような項目の集合を「厳格に同種（strictly homogeneous）」と呼びそれと対比させる形で，尺度の全ての項目が一般因子から影響を受け，かつ，いくつかの項目小集合が一般因子とは別の因子から影響を受けるような項目の集合を「本質的に同種（essentially homogeneous）」と呼んでいる（McDonald, 1999, pp. 96–97）．そして，階層的因子分析を扱う章においてこのような尺度の扱いを検討している．McDonald（1999）では，階層的因子モデルにおける ω の扱いを直接的に検討している訳ではないが，階層的因子モデルにおける ω は次節で検討する Zinbarg や Revelle らの一連の研究で検討されることとなる．

2．階層的因子分析モデルを用いた拡張

Zinbarg や Revelle らによる一連の研究（Revelle & Zinbarg, 2009; Zinbarg et al., 2005, 2006, 2007）は ω を階層的因子分析モデルの枠組みで捉えるものである．階層的因子分析では，観測される項目得点のベクトルは 4 つの部分に分解され

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}g + \boldsymbol{A}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{e} \tag{5}$$

と表される．ここで g は全ての観測変数に影響を及ぼす一般因子（general factor），$\boldsymbol{c}$ は一般因子負荷量ベクトル，$\boldsymbol{f}$ は観測変数のうちの一部の観測変数へと影響を与える群因子（group factor）のベクトル，$\boldsymbol{A}$ は群因子の因子負荷量行列，$\boldsymbol{s}$ は観測変数に固有の特殊因子（specific factor）のベクトル，$\boldsymbol{D}$ は対角成分が項目に特有な因子の負荷量からなる対角行列，$\boldsymbol{e}$ は誤差因子（error factor）のベクトルである．このモデルでは，すべての因子がお互いに直交しており，また誤差因子ベクトルの要素もお互いに直交しているという仮定が置かれる．階層的因子分析モデルではいくつかの層を考えるが，特に層の数が 2 つで一般因子からなる層といくつかの群因子からなる層を持つモデルは双因子モデル（bifactor model）と呼ばれている．図 1 に群因子が 3 つのときの双因子モデルのパス図を示した（独自因子は省略してある）．

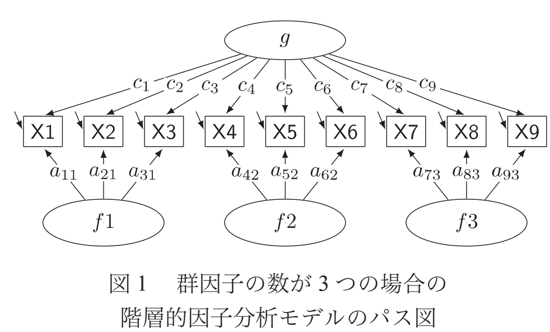

図 1　群因子の数が 3 つの場合の
階層的因子分析モデルのパス図

このモデルのもとで ω_h は

$$\omega_h = \frac{\mathbf{1}'\boldsymbol{cc}'\mathbf{1}}{\mathrm{Var}(X)} \tag{6}$$

として定義される（Zinbarg et al., 2005, Eq. 2）．ω_h は，尺度の総点の分散と一般因子による分散の比であり，ω_h がより大きい場合，観測された尺度得点は一般因子により強い影響を受けており，かつ，潜在次元における得点に一般化可能であることを示している（Zinbarg et al., 2006, p. 122）．添字の h は hierarchical の意味でこの係数が階層的モデルに基づくことを意味している．なお，（6）式で表される ω_h は，（5）式において群因子が想定されない場合（つまり $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}g + \boldsymbol{Ds} + \boldsymbol{e}$）には，1 因子モデルの（3）式と一致する．

（6）式において一般因子の因子負荷量ベクトルのみであった分子に，群因子の因子負荷量行列を加えて

$$\omega_t = \frac{\mathbf{1}'\boldsymbol{cc}'\mathbf{1} + \mathbf{1}'\boldsymbol{AA}'\mathbf{1}}{\mathrm{Var}(X)} \tag{7}$$

として定義したものも考案され（Zinbarg et al., 2005, Eq.8），後に ω_h との違いを区別することが重要であるとして ω_t と表記されるようになった（Revelle & Zinbarg, 2009）．ω_t は尺度得点の分散のうち，特殊因子と誤差因子を除く因子全体による変動の割合を表しており，添字の t は total を意味している．

階層的因子分析モデルにおける 2 つの ω は，何を真値の変動とみなすかが異なっている．ω_h は一般因子によって生じる変動のみを真値の変動とみなす一方で，ω_t ではそれに加えて群因子によって生じる変動も真値の変動とみなしている．前者は，尺度が一つの構成概念をどの程度よく測定しているかを示す重要な指標であるとされている（Revelle & Zinbarg, 2009, p. 149）．

3．近年のωの展開

統計的な手法の発展により近年，ω 係数にはさらなる変異形が定義されている．ここでは，（1）特殊因子による変動を含めた信頼性係数，（2）推定法の違いを反映した定義，（3）高次因子分析モデルに基づく信頼性係数を紹介する．

信頼性係数に関するチュートリアル論文である Revelle & Condon（2019）では，ω_t を前節の（7）式とは異なり

$$\omega_t = \frac{\mathbf{1}'\boldsymbol{cc}'\mathbf{1} + \mathbf{1}'\boldsymbol{AA}'\mathbf{1} + \mathbf{1}'\boldsymbol{DD}'\mathbf{1}}{\mathrm{Var}(X)} \tag{8}$$

と定義している（Eq.17）．これは，従来の因子分析モデルでは特殊因子の分散は誤差因子の分散と分離することができなかったが，当該の項目以外の項目との相関などを利用することによって，特殊因子の分散を推定する手法が提案されたことの影響を受けている（specificity-enhanced reliability coefficient の詳細については Bentler（2017）を参照）．特殊因子の分散は誤差分散とは異なり真値に含まれるという立場に立てば，この ω_t の定義は古典的テスト理論の信頼性の定義により近いものだとも言える．従って，特殊因子による変動も信頼できる分散（reliable variance）として評価したい場合にこの係数が選択肢となりうる．

ω をデータから計算するには因子負荷量や独自分散などのパラメータを推定する必要がある．近年ではパラメータを得る際の方法の違いによって ω の表記を分けている場合もある．前項で階層的因子分析モデルの一般因子の負荷量を用いる ω_h を紹介したが，この係数の算出に用いるパラメータの推定には 2 つの方法が提案されている．一つが，探索的因子分析を用いて高次因子モデルの解を得たのち，Schmid-Leiman 変換（Schmid & Leiman, 1957）を用いて一般因子と群因子それぞれの因子負荷量を得る方法で，もう一つが双因子モデル（Holzinger & Swineford, 1937）を指定した確認的因子分析を用いて直接的にそれぞれの因子負荷量を得る方法である．Revelle & Condon（2019）は（6）式の ω 係数を算出する際に，前者で得た推定値を用いるものを ω_h とし，後者を general factor の頭文字をとり ω_g と表記している．なお，これら推定法の違いが異なる値を生むメカニズムについては Yung et al.（1999）に詳しい．

階層的因子分析モデルを用いる代わりに，1 次因子間の相関関係を説明する 2 次因子を用いた高次因子分

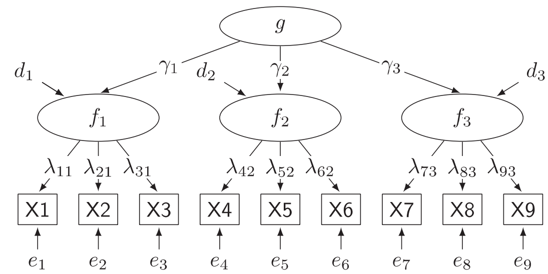

図 2　1 次因子の数が 3 つの場合の高次因子分析モデルのパス図

表 1　モデルの違いと ω 係数の変異形

モデル	何を真値の変動とみなすか	表記	数式番号
1 因子モデル	共通因子によって生じる変動	ω	(3)
双因子モデル	一般因子によって生じる変動（パラメータは SL 変換で推定）	ω_h	(6)
	一般因子によって生じる変動（パラメータは直接推定）	ω_g	(6)
	一般因子と群因子によって生じる変動	ω_t	(7)
	一般因子と群因子と特殊因子によって生じる変動	ω_t	(8)
高次因子モデル	高次因子によって生じる変動	ω_{ho}	(9)

析モデルを想定する場合もある．図 2 に3つの 1 次因子が 2 次因子によって説明されるモデルのパス図を示した．

高次因子分析モデルに対応した ω_{ho} が Flora（2020）によって定義されている（ho は higher order を意味する）．観測変数 X_j の k 番目の 1 次因子への因子負荷量を λ_{jk} として，k 番目の 1 次因子の 2 次因子への因子負荷量を γ_k とすると高次因子分析モデルにおける信頼性係数は

$$\omega_{ho} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_{jk}\gamma_k\right)}{\mathrm{Var}(X)} \tag{9}$$

として定義される．

この係数は尺度の総点の分散のうち，高次因子によって生じる分散の割合を意味している．項目全てに影響を与える因子の分散を真値とみなす点では階層的因子分析モデルに基づく ω_h と同じであるが，階層的因子分析モデルは一般因子が直接的に観測変数に影響を及ぼすことを想定している一方で，高次因子分析モデルでは 2 次因子は 1 次因子を経由して間接的に影響を及ぼす点に違いがある．

ここまでで概観した ω の変異形は表 1 にまとめることができる．想定するモデルおよび何を真値としてみなすかによって，異なる形の多様な ω が定義されていることが分かる．

Ⅲ．係数の利用に関する議論

ここまでは McDonald による ω 係数とその変異形を概観したが，本章では ω 係数の利用に関連した議論を整理する．近年の ω 係数の利用を推奨する主張は，α 係数の誤用と誤解に関する議論（e.g., Cortina, 1993; Schmitt, 1996; Sijtsma, 2009）の中で発展してきたので，α と関連づけて論じることが適切である．ここでは，α との仮定の違いや α の利用の是非について議論を紹介した後に，ω 係数の利用に関連した議論を概観する．

1．α と ω の仮定の違い

α 係数の誤用を指摘する近年の主張の中で最も繰り返しなされているものが，α 係数の利用のための仮定が厳しく心理学の研究においては多くの場合にこの仮定を満たせないというものである．具体的には，α が信頼性の正確な推定値となるためには，尺度に含まれる項目集合が本質的タウ等価である必要がある．その仮定を違反した場合には α は信頼性を過小推定することが知られている（Novick & Lewis, 1967）．因子分析モデルでは，本質的タウ等価であることは各観測変数の因子負荷量が等しいことを意味している．

それに対して ω 係数は項目集合が本質的タウ等価な場合に加え，同属（congeneric）の場合でも用いることができ適用範囲がより広い信頼性の指標だと言える（Furr, 2018）．項目集合が本質的タウ等価な場合には α と ω の値は一致する（McDonald, 1999, p. 92）．

また，ω 係数は項目の誤差間に相関があるような測定モデルにも対応できるという利点もある．α は誤差の相関がある場合に信頼性を過大推定することがあるが（Kano & Azuma, 2003）ω 係数では，モデルを正しく特定することができれば過大推定は生じない．したがって，より柔軟な測定モデルに対して，信頼性を正確に推定することが可能となる．

2．α の使用をやめるべきかについての議論

ω 係数の利用を推進する主張は α の代替案を検討する中で注目を集めたが，α と ω の使い分けについて必ずしも計量心理学者の間で見解の一致がある訳ではない．α の利用を全面的にやめて ω を含む代替案の利用を推奨する McNeish（2018）のような主張がある一方で，そうした主張に対して Raykov & Marcourlides（2019）や Savalei & Reise（2019）は反論を寄せている．

McNeish（2018）は α の利用の問題点として仮定が厳しいことを挙げている．その仮定は（1）本質的タウ等価であること，（2）項目が正規分布に従う連続変数であること，(3) 項目の誤差間が無相関であること，

に加えて，（4）尺度が測定するものが一次元であるとしている．これらの α の問題点を指摘したのちに，結論部では α のことを「時代遅れ（obsolete, p. 423）」であると結論づけ，ω 係数を含む代替的な手法で得た信頼性を報告する必要性を主張している．

McNeish の主張に対して Raykov & Marcorlides（2019）は，α は今後も有用な場面が多いと反論している．McNeish が α の前提だと指摘する「項目が正規分布に従う連続変数であること」は，そもそも McNeish による誤解であり，α の算出のためには，連続性も正規性の仮定も必要ないことを Cronbach（1951）を引用しながら示している．本質的タウ等価でない場合に α が信頼性を過小推定することは事実であるが，その程度は項目の誤差相関のない 1 因子モデルでは，無視できるほど小さく（Raykov, 1997），また α が信頼性を下回っている程度が無視できるほど小さいかどうかを確認する手法も考案されている（Raykov & Marcoulides, 2015）ことから，α を全く使うべきでないという主張は誤解を招くとしている．

また，Savalei & Reise（2019）は McNeish が α と ω の違いを誇張していると反論を行なっている．α は本質的タウ等価の前提が違反された場合には確かに信頼性を過小推定するが，一次元性の前提が保たれている限りそのバイアスは一般に小さいという点を指摘している（なお，直接的ではないものの同様の指摘は McDonald（1999, p. 93）においてもなされている）．したがって，尺度（テスト）が過去に十分に研究されており，潜在変数の一次元性が十分に確かめられているのであれば，α は依然として有用であるとしている．また，Savalei & Reise（2019）は次節で述べるように，ω 係数の利用における問題点も提起している．

3．ω 係数の利用が問題になる場合

α に対して ω は，測定のモデルに対する仮定が緩く幅広い範囲に適用可能であるものの，ω の利用が問題となるようなケースも存在している．それは ω が因子分析に基づく信頼性係数であるため，データに適合が悪いモデルの因子負荷量の推定値から計算された信頼性係数は，意味がない値になる可能性があることである．

Savalei & Reise（2019）は，McNeish（2018）への反論の中で，R の pysch パッケージ所収の omega 関数で ω 係数を算出した場合に，係数の算出に用いられたモデルにおいて群因子が解釈不能である例を挙げている．そのような解釈不能な因子を含む因子分析モデルから算出された係数も同様に解釈不能であるとして，モデルについて十分に検討することなしに機械的に信頼性を計算することへの警鐘を鳴らしている．また，サンプリングによる変動によって真のモデルには存在しない潜在次元を抽出してしまうリスクがあり，そうした場合に計算される信頼性係数には正のバイアスが生じる可能性があるため（Yang & Green, 2010），正確な推定には大きなサンプルサイズが必要であることを指摘している．

4．ω 係数の使い分けに関して

上記の議論を踏まえて Savalei & Reise（2019）は信頼性係数を報告する際には，α にせよ ω にせよ背後にある測定モデルを十分に考えることなく報告するのはいずれも有害であるとしている．複数ある ω については「全ては因子が実質的にどう解釈されるか，および，信頼性を算出するときに研究者が知りたいこと次第である（p. 4）」として，報告する信頼性係数を使い分けるよう推奨している．具体的には，尺度が一次元である場合には，α と ω で大きな差があることはまれなので α の報告で十分としている．潜在変数が多次元で潜在変数間の相関が強くない場合には，下位尺度ごとの α と ω を報告する慣習に従えば良いとしている．多次元で潜在変数間に強い相関がある場合には，選択されたモデルに応じて報告する係数を変えることが提案され，双因子モデルが最もデータに適合するときには ω_h を，1 次の斜交モデルや高次因子モデルが当てはまるときには ω_t を報告することを推奨している．

また Flora（2020）は ω 係数を報告する際にどの ω を報告するべきかについてのフローチャートを提示している．そこでは，（1）観測変数が連続かカテゴリか（例えば，リッカート式の項目で 5 よりも多い回答カテゴリがあるか），（2）データに 1 因子モデルが当てはまるか，（3）多因子モデルが当てはまる場合に，それは双因子モデルか，高次因子モデルかそれ以外か，の質問に答えることによって報告するべき適切な ω を選べるようになっている．

ω 係数の使い分けに関するいずれの提案においても，報告するべき ω は測定モデルに依存する．つまり，研究者がどのような構造の潜在変数のモデルを構成するかによって適切な ω は異なるということである．

また報告するべき ω は測定モデルのみでは決まらない．その測定モデルにおいてどの潜在変数を真値とみなして信頼性を検討したいかによっても異なってくる．例えば，心理尺度において項目のワーティングの

効果を双因子モデルの群因子で捉えようとする状況が考えられるが，このとき群因子は「方法によって生じる人工物（method artifact）」を反映することとなる（Flora, 2020）．このような場合には，群因子によって生じる分散は尺度が測定しようとする構成概念の分散とは異なるため ω_t ではなく ω_h を使う方が適切だろう．したがって，ω 係数の報告の際には測定モデルおよびそのモデルの何を真値と見なすかについての注意深い検討が欠かせない．そうした検討をせずに適切な ω を選択することは不可能である．

Ⅳ．ω係数の適切な報告のための留意点と今後の課題

本稿は α 係数の代替案として近年注目を集めている ω 係数の変異形，およびその利用に関する議論を整理した．これらの議論を踏まえ ω 係数の適切な報告のための留意点を 3 点指摘して本稿のまとめとする．

1 点目は，信頼性係数の算出の前にはモデルを十分に注意深く検討するべき点である．表 1 に示したように ω 係数の適切な選択は, 測定モデルと不可分である．因子分析モデルに基づく信頼性は，そもそものモデルが不適切であれば，不正確な数値を算出するだろう．Furr（2018）は，ω の算出について（1）確認的因子分析における測定モデルの当てはまりの確認，（2）モデルの修正，（3）最終的なモデルの因子負荷量から係数の算出，と 3 つのステップを推奨しているが，ここからも，信頼性の報告はモデル構成と独立していないことが分かる．

2 点目は，ω 係数の報告に際してどの ω を報告しているのかを明記することである. 本稿で見たように，ω 係数には複数の変異形があり，それぞれの意味は異なるため，どの ω が報告されているのかを明確にすることは，尺度の開発者と利用者の双方にとって望ましいだろう．

3 点目は，Revelle & Condon（2019）も提案していることではあるが，複数の信頼性係数を報告することである．例えば α と ω が併記されており，その差が顕著なのであれば，潜在変数の 1 次元性の仮定の違反などモデル構成の不具合に気づく契機となるだろう．

本稿では McDonald の ω とその変異形のいくつかを扱ったが，この係数の近年の展開を網羅できた訳ではない．階層的因子分析において尺度の総点の信頼性の代わりに下位尺度の得点の信頼性が評価の対象となることがあるが，こうした場面で Rodriguez et al.（2016）は一般因子への負荷量の代わりに下位尺度の群因子への負荷量を用いて定義した ω_{hs} を用いて下位尺度の信頼性を評価している（hs は hierarchical subscale を意味する）．また，観測変数が順序尺度の場合にカテゴリカル因子分析が用いられることがあるが，これに基づく信頼性係数が Green & Yang（2009）によって定義され，その適用範囲の検討のシミュレーションもいくつか行われている（Kim et al., 2020; 小野島・椎名, 2021; Yang & Green, 2015）．今後は，これらの派生も含めて議論していくことで，この係数のより適切な利用につながっていくだろう．

付記

本論文に関して開示すべき利益相反関連事項はない．本研究は JSPS 科研費21J11767，22K20305の助成を受けた．

引用文献

Bentler, P. M. (2009). Alpha, dimension-free, and model-based internal consistency reliability. *Psychometrika*, *74*(1), 137–143. https://doi.org/10.1007/s11336-008-9100-1

Bentler, P. M. (2017). Specificity-enhanced reliability coefficients. *Psychological Methods*, *22*(3), 527–540. https://doi.org/10.1037/met0000092

Brennan, R. L. (2001). *Generalizability Theory*. Springer.

Cortina, J. M. (1993). What is coefficient alpha? An examination of theory and applications. *Journal of Applied Psychology*, *78*(1), 98–104. https://doi.org/10.1037/0021-9010.78.1.98

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, *16*(3), 297–334. https://doi.org/10.1007/BF02310555

Flora, D. B. (2020). Your coefficient alpha is probably wrong, but which coefficient omega is right? A tutorial on using R to obtain better reliability estimates. *Advances in Methods and Practices in Psychological Science*, *3*(4), 484–501. https://doi.org/10.1177/2515245920951747

Furr, R. M. (2018). *Psychometrics: An Introduction* (3rd ed.). SAGE Publications.

Green, S. B., & Yang, Y. (2009). Reliability of summed item scores using structural equation modeling: An alternative to coefficient alpha. *Psychometrika*, *74*(1), 155–167. https://doi.org/10.1007/s11336-008-9099-3

Holzinger, K. J., & Swineford, F. (1937). The bi-factor method. *Psychometrika*, *2*(1), 41–54. https://doi.org/10.1007/BF02287965

Kano, Y., & Azuma, Y. (2003). Use of SEM programs to precisely measure scale reliability. H. Yanai, A. Okada, K. Shigemasu, Y. Kano, & J. J. Meulman (Eds.), *New Developments in Psychometrics* (pp. 141–148). Springer.

Kim, S., Lu, Z., & Cohen, A. S. (2020). Reliability for tests with items having different numbers of ordered categories. *Applied Psychological Measurement*, *44*(2), 137–149. https://doi.org/10.1177/0146621619835498

McDonald, R. P. (1978). Generalizability in factorable domains: “Domain validity and generalizability”. *Educational and Psychological Measurement*, *38*(1), 75–79. https://doi.org/10.1177/001316447803800111

McDonald, R. P. (1985). *Factor Analysis and Related Methods*. Psychology Press.

McDonald, R. P. (1999). *Test theory: A unified treatment*. Lawrence Erlbaum.

McNeish, D. (2018). Thanks coefficient alpha, we’ll take it from here. *Psychological Methods*, *23*(3), 412–433. https://doi.org/10.1037/met0000144

Novick, M. R., & Lewis, C. (1967). Coefficient alpha and the reliability of composite measurements. *Psychometrika*, *32*(1), 1–13. https://doi.org/10.1007/BF02289400

岡田　謙介 (2011). クロンバックの α に代わる信頼性の推定法について――構造方程式モデリングによる方法・McDonald の ω の比較―― 日本テスト学会誌, *7*(1), 38–50. https://doi.org/10.24690/jart.7.1_37

小野島　昂洋・椎名乾平 (2021). 順序カテゴリデータへの確認的因子分析に基づく信頼性係数の評価――モデルが正しく特定された場合と誤特定された場合の比較―― 教育心理学研究, *69*(3), 281–296. https://doi.org/10.5926/jjep.69.281

Raykov, T. (1997). Scale reliability, Cronbach’s coefficient alpha, and violations of essential tau-equivalence with fixed congeneric components. *Multivariate Behavioral Research*, *32*(4), 329–353. https://doi.org/10.1207/s15327906mbr3204_2

Raykov, T., & Marcoulides, G. A. (2015). A Direct Latent Variable Modeling Based Method for Point and Interval Estimation of Coefficient Alpha. *Educational and Psychological Measurement*, *75*(1), 146–156. https://doi.org/10.1177/0013164414526039

Raykov, T., & Marcoulides, G. A. (2019). Thanks coefficient alpha, we still need you! *Educational and Psychological Measurement*, *79*(1), 200–210. https://doi.org/10.1177/0013164417725127

Raykov, T., & Shrout, P. E. (2002). Reliability of scales with general structure: Point and interval estimation using a structural equation modeling approach. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, *9*(2), 195–212. https://doi.org/10.1207/S15328007SEM0902_3

Revelle, W., & Condon, D. M. (2019). Reliability from α to ω : A tutorial. *Psychological Assessment*, *31*(12), 1395–1411. https://doi.org/10.1037/pas0000754

Revelle, W., & Zinbarg, R. E. (2009). Coefficients alpha, beta, omega, and the GLB: Comments on Sijtsma. *Psychometrika*, *74*(1), 145–154. https://doi.org/10.1007/s11336-008-9102-z

Rodriguez, A., Reise, S. P., & Haviland, M. G. (2016). Evaluating bifactor models: Calculating and interpreting statistical indices. *Psychological Methods*, *21*(2), 137–150. https://doi.org/10.1037/met0000045

Savalei, V., & Reise, S. P. (2019). Don’t forget the model in your model-based reliability coefficients: A reply to McNeish (2018). *Collabra: Psychology*, *5*(1), Art. 1. https://doi.org/10.1525/collabra.247

Schmid, J., & Leiman, J. M. (1957). The development of hierarchical factor solutions. *Psychometrika*, *22*(1), 53–61. https://doi.org/10.1007/BF02289209

Schmitt, N. (1996). Uses and abuses of coefficient alpha. *Psychological Assessment*, *8*(4), 350–353. https://doi.org/10.1037/1040-3590.8.4.350

Sijtsma, K. (2009). On the use, the misuse, and the very limited usefulness of Cronbach’s alpha. *Psychometrika*, *74*(1), 107–120. https://doi.org/10.1007/s11336-008-9101-0

Spearman, C. (1904). The proof and measurement of association between two things. *The American Journal of Psychology*, *15*(1), 72–101. https://doi.org/10.2307/1412159

Spearman, C. (1910). Correlation calculated from faulty data. *British Journal of Psychology, 1904–1920*, *3*(3), 271–295. https://doi.org/10.1111/j.2044-8295.1910.tb00206.x

Yang, Y., & Green, S. B. (2010). A note on structural equation modeling estimates of reliability. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, *17*(1), 66–81. https://doi.org/10.1080/10705510903438963

Yang, Y., & Green, S. B. (2015). Evaluation of structural equation modeling estimates of reliability for scales with ordered categorical items. *Methodology: European Journal of Research Methods for the Behavioral and Social Sciences*, *11*(1), 23–34. https://doi.org/10.1027/1614-2241/a000087

Yung, Y.-F., Thissen, D., & McLeod, L. D. (1999). On the relationship between the higher-order factor model and the hierarchical factor model. *Psychometrika*, *64*(2), 113–128. https://doi.org/10.1007/BF02294531

Zinbarg, R. E., Revelle, W., & Yovel, I. (2007). Estimating ω_h for structures containing two group factors: Perils and prospects. *Applied Psychological Measurement*, *31*(2), 135–157. https://doi.org/10.1177/0146621606291558

Zinbarg, R. E., Revelle, W., Yovel, I., & Li, W. (2005). Cronbach’s α, Revelle’s β, and McDonald’s ω_H: Their relations with each other and two alternative conceptualizations of reliability. *Psychometrika*, *70*(1), 123–133. https://doi.org/10.1007/s11336-003-0974-7

Zinbarg, R. E., Yovel, I., Revelle, W., & McDonald, R. P. (2006). Estimating generalizability to a latent variable common to all of a scale’s indicators: A comparison of estimators for ω_h. *Applied Psychological Measurement*, *30*(2), 121–144. https://doi.org/10.1177/0146621605278814

（最終版2023年 1 月 9 日受理）

Aichi Gakuin University Bulletin of the Faculty of Psychology, Vol. 1, 9–17, 2023

Variants of Coefficient Omega:
A Review of Reliability Coefficients Based on Hierarchical Factor Analysis and Discussions of Their Use

Takahiro ONOSHIMA

With recent discussions on the misuse of coefficient alpha, coefficient omega, a reliability coefficient based on factor analysis, has received increased attention. Although coefficient omega can be calculated in various ways, there is little discussion on how to choose the appropriate variant, which may lead researchers to be reluctant to use it. With the aim of making recommendations to applied researchers reporting this coefficient, this study reviewed the development of McDonald's omega based on hierarchical factor analysis and discussions on choosing an appropriate variant of the coefficient. Based on the results, the following three recommendations were made: (1) measurement models should be sufficiently examined, (2) which variant of omega was calculated should be clarified, and (3) multiple reliability coefficients should be reported.

Key words: reliability, coefficient omega, factor analysis