

〈総説〉

線形・非線形時系列解析とその応用 (2)

千 野 直 仁*

1 はじめに

姉妹論文では、まず幾つかの人工的時系列信号に対する伝統的時系列解析、とりわけスペクトル解析の結果や、近年の非線形時系列解析、とりわけカオス時系列解析における軌道不安定性 (orbital instability) を中心に紹介した。また、時系列信号を間引いた場合の力学系の位相的特徴の変化について紹介した。それに対して、この論文では最初にリカレンスプロットの概要を紹介し、人工的時系列信号にそれを施した2, 3の例を紹介する。つぎに幾つかの人口的時系列信号に対するフラクタル次元の概要の紹介、とりわけ樋口の方法 (Higuchi's method) を人口的時系列信号に適用した結果を紹介する。後半のフラクタル次元は、カオス時系列信号の自己相似性 (self-similarity) という、カオスの軌道不安定性と並び、重要な特徴の1つである。

2 人工的時系列データのリカレンスプロットの概要と分析結果

既に姉妹論文の考察のところで指摘したように、線形時系列解析の1つとしてのパワースペクトルの算出が許容されるためには、時系列信号が定常性を持っていなければならない。また、非線形時系列解析、とりわけカオス時系列解析の1つとしてのリアプノフ指数の算出が許容されるためには、時系列信号がエルゴード的でなければならない。

これに対して、これらの前提を必要とせず時系列信号の多様な性質を描き出すことが可能な方法として、近年リカレンスプロット (recurrence plots, 略して RP) が注目されている。RP は、Eckmann et al. (1987) が提唱したもので、1990年代以降多くの研究がなされている (例えば、Casdagli, 1997; 大ら, 2002; Fletcher, 2000; 平田, 2011; Hirata & Aihara, 2010; 寶来ら, 2002;

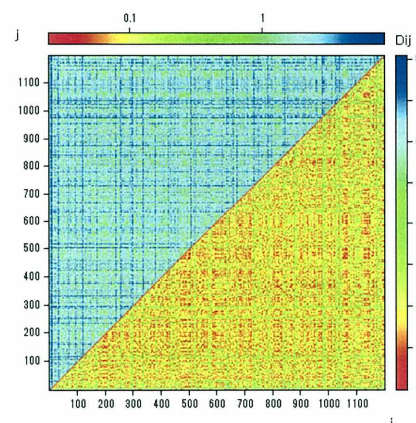


図1：ホワイトノイズ時系列データのリカレンスプロット

Ikeguchi et al., 1997; Ngamga et al., 2008; Romano et al., 2004; Zbilut et al., 1998; 山田・合原, 1999; Webber & Zbilut, 1994).

リカレンスプロットの描画法はきわめて単純なもので、時系列信号 $v(1), v(2), v(3), \dots, v(N)$ の2時点間の距離

$$d_{ij} = |v(i) - v(j)|, \quad (1)$$

に基づいて、 d_{ij} が小さい値より小さい時に2次元の座標 (i, j) に点をプロットしたり、 d_{ij} の値をグラデーションカラーで表現してすべての距離情報をプロットしたりする。この論文で利用しているカオスソフト SCT では、後者を用いている。

例えば、姉妹論文でのホワイトノイズ、一様乱数、及びロジスティック写像のリカレンスプロットのカラー画像を示したものが図1から3である。なお、ここで用いたロジスティック写像は、次式による：

$$x(n+1) = b * x(n)(1 - x(n)), \quad b = 4. \quad (2)$$

* 愛知学院大学心身科学部心理学科

(連絡先) 〒470-0195 愛知県日進市岩崎町阿良池12 E-mail: chino@dpc.agu.ac.jp

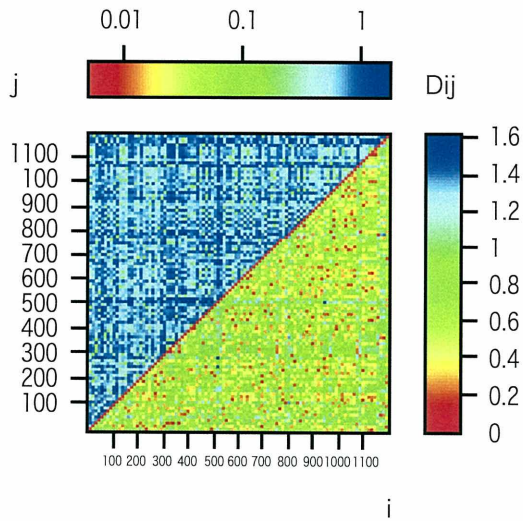


図 2：一様乱数時系列データのリカレンスプロット

ちなみに、カラー表示は平面上の度数の違いをカラーグラデュエーションで表すものである。なお、これらの図では、左上三角部と右下三角部で色が異なるが、前者は後者のデータの対数を取ったものである。

上記 3 つのリカレンスプロットのうち、最後のロジスティック写像の場合、全 2 者と比べて、よく見ると（右下 3 角部の点の集合の中に）部分的に斜め右上向きの集合（あるいは、短い上向きの対角線分）（short upward diagonal segments）が数多く見られる。これは、カオスの 1 つの特徴である（例えば、平田, 2011, p. 151–152; Webber & Zbilut, 1994, p. 968, Fig. 4）。

つぎに、リカレンスプロットでロジスティック写像以上に短い上向きの対角線分が数多く見られるエノン写像（Hénon map）のそれを見てみよう。エノン写像は、2 次元の差分方程式であり（Hénon, 1976）、次式で表

される。

$$\begin{aligned} x(n+1) &= 1 - ax(n)^2 + y(n), \\ y(n+1) &= bx(n). \end{aligned} \quad (3)$$

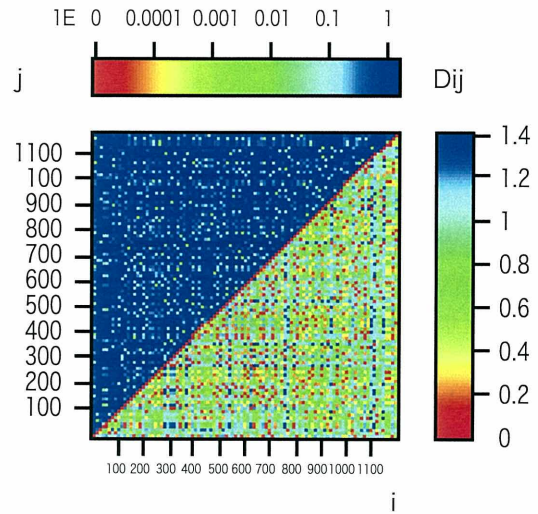


図 3：ロジスティック写像のリカレンスプロット

ここで、 $a=1.4$, $b=0.3$ である。まず、原信号であるエノン写像の x - 軸座標の時系列を図 4 に示す。

エノン写像のリカレンスプロットの「短い上向きの対角成分」をより見やすくするために、カラーではなくモノクロ画像で示したのが、図 5 である。これに対して、ランダム性もカオス性もない周期時系列信号、例えば姉妹論文 (1) のサインカーブ時系列データの場合はリカレンスプロットはどうなるであろうか。このデータのリカレンスプロットは図 6 のようになる。図 6 の右下三角部を見ると、サインカーブの特徴を反映して、規則的な模様がきれいに描かれていることがわかる。

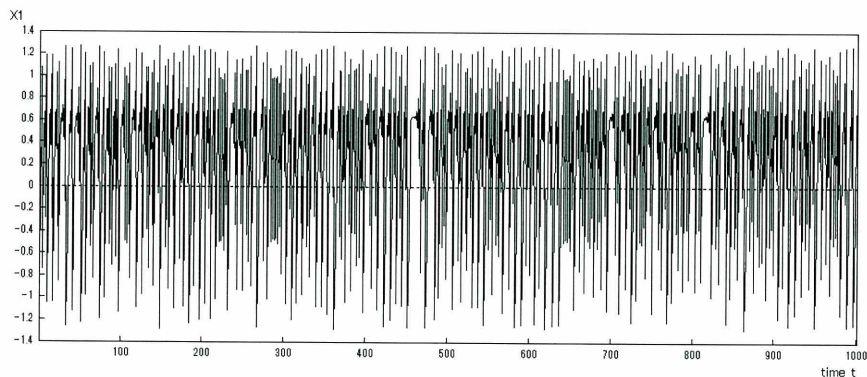


図 4：エノン写像時系列データ

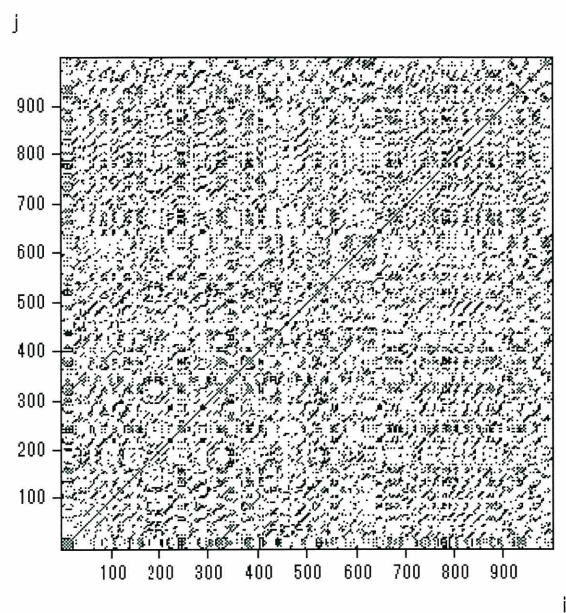


図 5：エノン写像のリカレンスプロット

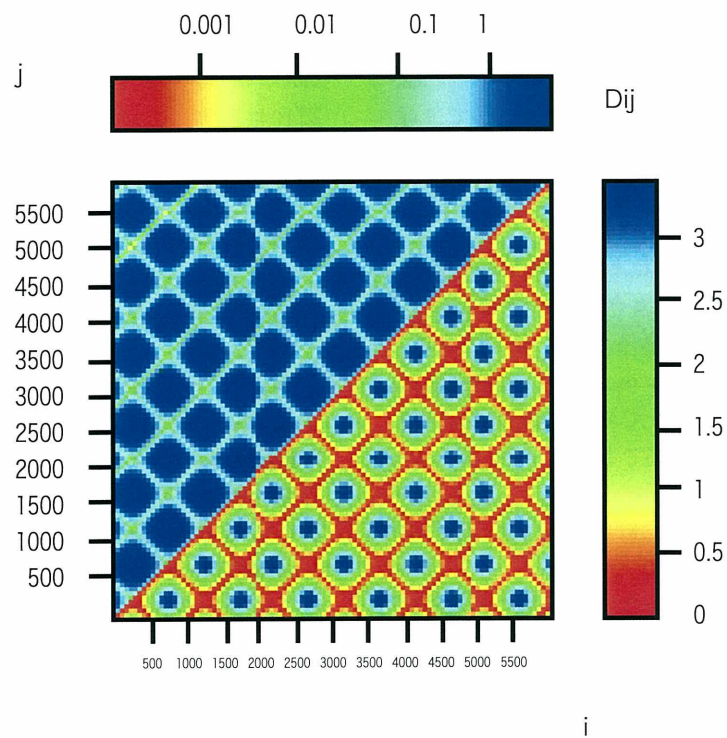


図 6：サインカーブ時系列データのリカレンスプロット

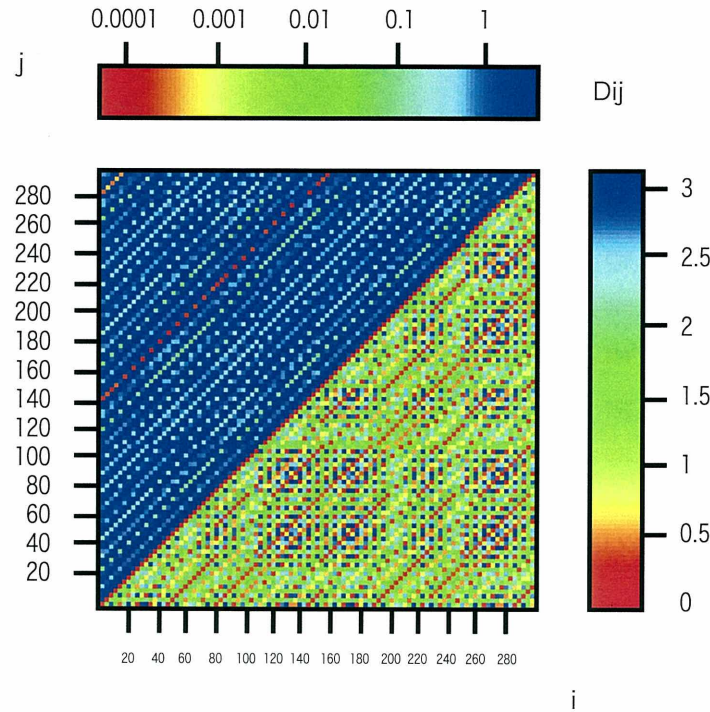


図 7：間引き後のサインカーブ時系列データのリカレンスプロット

一方、同信号を 100 時点づつ間引いた場合のリカレンスプロット結果を示したのが、図 7 である。姉妹論文で述べたように、この信号は間引き前の信号では遅延座標が閉軌道となっていたものがトラス状に変化しており、図 7 のリカレンスプロットはトラス状軌道のそれであることに注意したい。

一方、サインカーブが時間とともに減衰し平衡点 (equilibrium) に収束していくようなカーブではリカレンスプロットはどうなるであろうか。まず図 8 は、減衰線形振動子 (damped linear oscillator) の特別なケースを描いたものである。ここでの減衰線形振動子は次式で表される 2 階微分方程式である：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + (a^2 + b^2)x = 0, \quad a = 0.1, b = 1. \quad (4)$$

図 9 は、減衰線形振動子の時系列データのリカレンスプロット結果を示す。この図を見ると右下 3 角部分のほとんどは赤一色となっているが、わずかに同部分の左端に近いところにサインカーブ時系列のような穴目模様が見られることがわかる。さらに、この穴目模様は右に行くほど小さくなっていることもわかる。これは減衰線形振動子の振動の特性を反映していると思われる。

最後に、よく知られた間欠性カオス (intermittent

chaos) (例えば、Aizawa & Kohyama, 1984; Kohyama, 1984; Manneville, 1980; Manneville & Pomeau, 1980) を図 10 に示す。この図は、Aizawa & Kohyama (1984, p. 847) の修正ベルヌイ写像 (the modified Bernoulli map) を表す次式の 2 次元差分方程式のパラメータのうち、 $B=3, C=0$ としたケースである。

$$\begin{aligned} x(n+1) &= x(n) + 2^{(B-1)}(1-2C)x(n)^B + C, \\ x(n+1) &= x(n) - 2^{(B-1)}(1-2^*C)(1-x(n))^B - C. \end{aligned} \quad (5)$$

修正ベルヌイ写像時系列信号の特徴は、図にあるように激しく振動するバースト層 (the bursting phase) と振動のないラミナー層 (the laminar phase) から成る点である。なお、彼らによれば、(5) 式のパラメータのうち C がゼロでない小さな値をとる場合には、この時系列はある限られた領域で定常的な時系列となり、 f^ν スペクトル (the f^ν spectrum) が観測できるという。図 11 は、この信号のリカレンスプロットを示す。

3 人工的時系列データのフラクタル次元の概要と分析結果

一般に、カオスの幾つかの特徴 (例えば、合原編, 2000) のうち、軌道不安定性と並び、重要な特徴としてアトラクタのフラクタル性 (fractal property)、自己

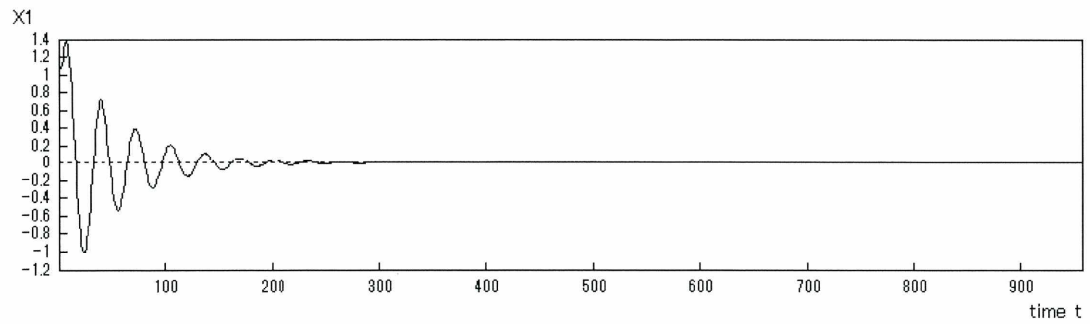


図 8 : 減衰線形振動子時系列データ

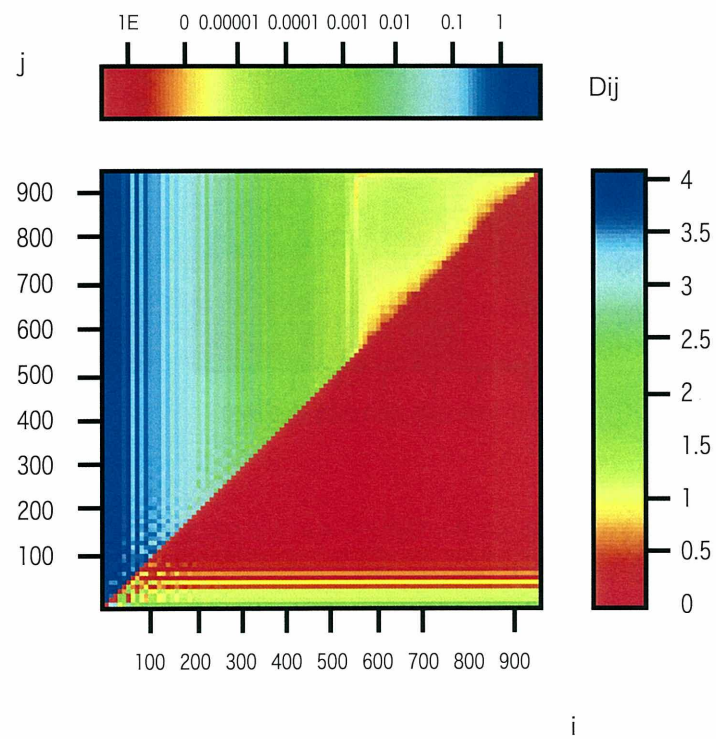


図 9 : 減衰線形振動子時系列データのリカレンスプロット

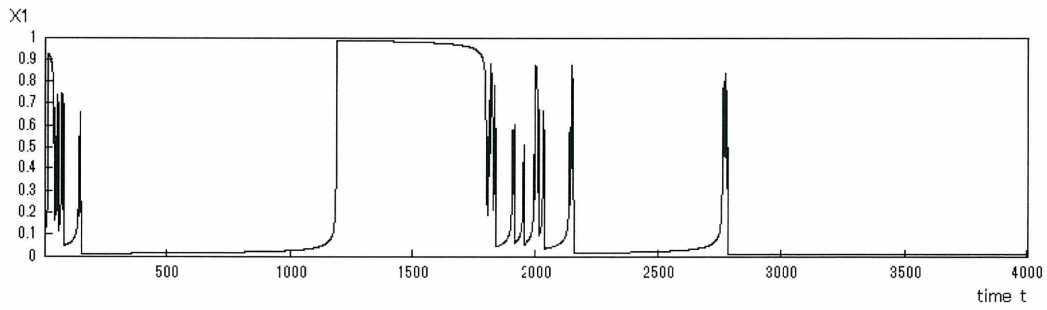


図10：修正ペルヌイ写像時系列データ

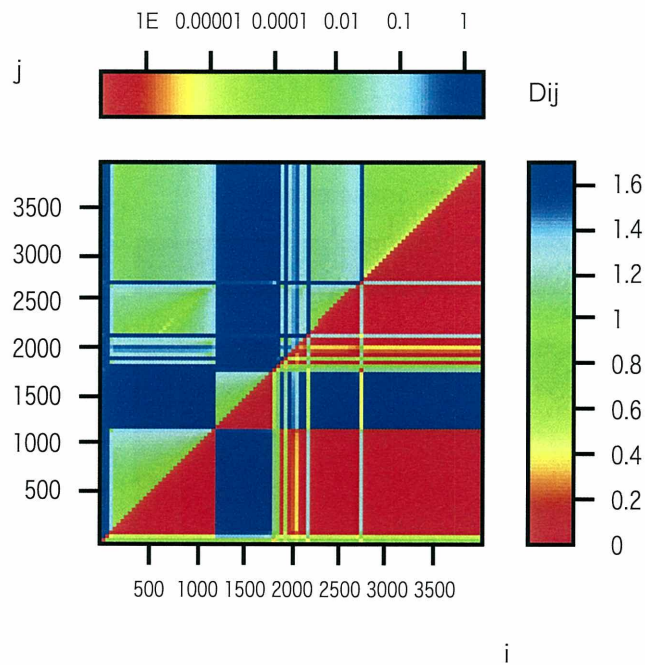


図11：修正ペルヌイ写像データのリカレンスプロット

相似性があげられる。軌道不安定性に対して、後者は図形や軌道の幾何学的特徴を表す。ある図形が自己相似的である場合、その図形のどんな部分を取り出してそこを拡大しても、その図形の全体的な特徴がみられる。同様なことが時系列信号の軌道についても言える場合、その軌道は自己相似性を持つという。

自己相似性は、各種のフラクタル次元 (fractal dimensions) により表現される。同次元については、これまでにボックスカウント次元 (box counting dimension)、相関次元 (correlation dimension)、樋口の方法 (Higuchi, 1987) などが提案されている。ちなみに、

ボックスカウント次元は、容量次元 (capacity dimension)、グリッド次元 (grid dimension) などとも呼ばれることがある (例えば, Russell et al., 1980)。

まず、最も単純なフラクタル次元について紹介するとつぎのようである。すなわち、通常の図形の次元は、例えば通常の線は1次元であり同平面は2次元などのように正数値となる。この直感的な次元数をより正確に定義するには、次のような関係に注意するとよい。すなわち、ある図形を $\frac{1}{r}$ に縮小した図形を用いて、もとの図形を覆い尽くすために最低限必要な縮小図形の数を $N(r)$ とすれば、両者の間には、つぎの関係が成

り立つ.

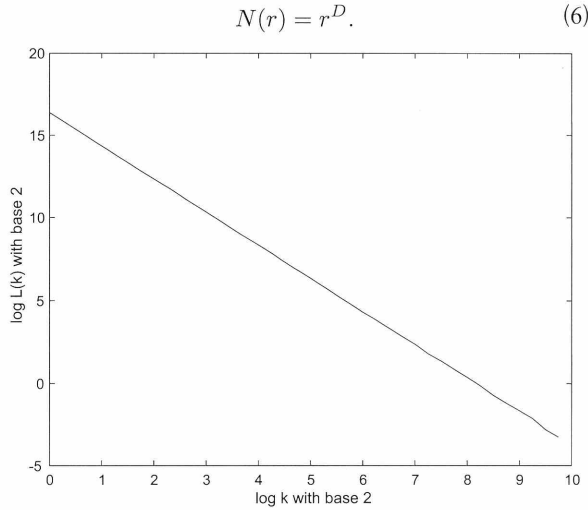


図12：樋口の方法によるロジスティック写像のフラクタル性

例えば、線分を $\frac{1}{2}$ に縮小した線分で、もとの線分を再現するには縮小線分は 2 つ $=2^1$ 必要である。すなわち、この場合 $D=1$ であり、したがって、フラクタル次元は 1 となる。しかし、図形の中には線分から成り立っているにも関わらず、次元が正数値とならないものが存在する。よく知られたものに、コッホ曲線 (Koch curve) やシェルピンスキーのギャスケット (Sierpinski Gasket) などがある。ちなみに、前者のフラクタル次元は 1.26 、シェルピンスキーのギャスケットの同次元は 1.585 である。

つぎに相関積分 (correlation integral) について述べる。相関積分は、Grassberger & Procaccia (1983a, b) によるもので、相関次元を求めるためには相関積分を求めなければならない。相関積分は、 m 次元空間上での軌道の各点 $\mathbf{v}(i)$, $i=1, \dots, N$ に対して

$$C^m(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j}^N I[r - |\mathbf{v}(i) - \mathbf{v}(j)|]. \quad (7)$$

ここで、 $I(t)$ はヘビサイド階段関数 (Heaviside-step function) で、

$$I(t) = \begin{cases} 1, & (t \geq 0) \\ 0, & (t \leq 0) \end{cases}$$

つまり、相関積分は、 m 次元空間上での軌道の各点で距離 r に入る軌道の点の数の平均 (の極限) である。

上記の相関積分 $C^m(r)$ が r の適当な領域で

$$C^m(r) \propto r^{\nu(m)}, \quad (8)$$

の時、(8) 式のスケーリング指数 $\nu(m)$ は相関指数 (correlation exponent) と呼ばれる。これより、(8) 式の両辺の対数を取るにより得られる関係式を考慮して、 $\log r$ を横軸に、 $\log C^m(r)$ を縦軸にプロットしたとき、あるスケールの範囲 $r_1 \leq r \leq r_2$ で $\nu(m)$ なる勾配の直線になっていれば、その範囲内で自己相似性が成り立つものと見れる。

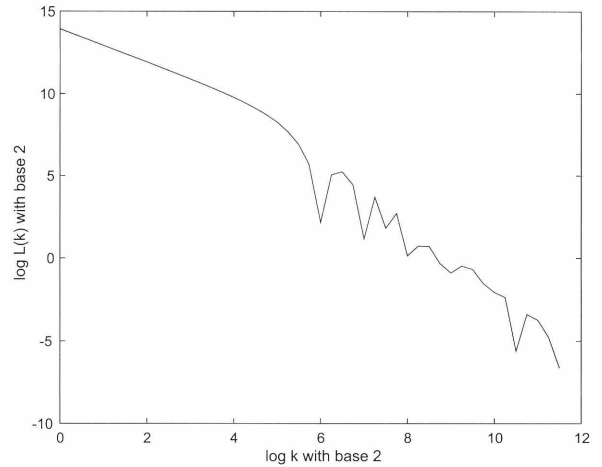


図13：樋口の方法によるサインカーブ時系列のフラクタル性

(7) 式の相関積分を一般化して、距離 r の超立方体を n 個考え、

$$C_q^m(r) = \sum_{i=1}^n p_i^q, \quad (9)$$

とすると、(9) 式が

$$C_q^m(r) \propto r^{\nu_q(m)}, \quad (10)$$

と書けたとする。上式の $\nu_q(m)$ は、 q 次の相関指数と呼ばれる (Grassberger & Procaccia, 1983a)。ここで、 $q=2$ の場合、相関次元と呼ばれる。

相関次元も、既述のフラクタル次元同様、多くの場合非整数の値をとるが、整数値をとる場合もある。例えば、記述のロジスティック写像などの非可逆的写像 (noninvertible maps) では、相関次元は整数値となるが、エノン写像などの散逸的写像 (dissipative maps) では同次元は非整数となる (例えば、Sprott, 2003)。ちなみに、ロジスティック写像では相関次元は 1 、エノン写像では $1.220 \pm .036$ となることが知られている。

一方、樋口の方法では、もとの時系列信号を $x_1, x_2,$

..., x_n として, 新たな時系列 x_k^m を次のように生成する:

$$x_m, x_{m+k}, x_{m+2k}, \dots, x_{m+\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor k}, \quad m = 1, \dots, k.$$

つぎに, 樋口の方法では, x_k^m の長さを以下のように定義する:

$$L_m(k) = \left\{ \left[\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor} |x_{m+ik} - x_{m+(i-1)k}| \right] \frac{N-1}{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor k} \right\} / k. \quad (11)$$

ここで, (11) 式の $[\bullet]$ 記号は, ガウスの整数 (Gaussian integer) である.

最後に, われわれは時間間隔 k ごとに, 上記 $L_m(k)$ の k 組に亘る平均長 $L(k)$ を計算する. もし, これが,

$$L(k) \propto k^{-D}, \quad (12)$$

ならば, 信号は次元 D のフラクタルであると呼ぶ.

最後に, 相関次元の場合と同様, (12) 式の両辺の対数を取り, $\log k$ を横軸に, $\log L(k)$ を縦軸にプロットした時, これが $-D$ なる勾配の直線になっていれば, 信号は自己相似性が成り立つと見れる. この時, 当該信号は次元 D のフラクタルと言える.

なお, フラクタル次元 D は, 時系列信号のパワースペクトル $P(f) \propto f^{-\alpha}$ における α との間につぎのような関係があることが知られている (Berry, 1970):

$$D = (5 - \alpha)/2, \quad 1 < \alpha < 3. \quad (13)$$

Berry (1979) は, 上式での D の違いにより,

1. $D=1$ ($\alpha=3$) の時, 周辺のフラクタル (marginal fractal) で, ほとんどもめらかなカーブ,
2. $D=1.5$ ($\alpha=2$) の時, ブラウン的フラクタル (Brownian fractal) で, 1次元ブラウン運動 (Brownian motion) の時,
3. $D=2$ ($\alpha=1$) の時, 極端なフラクタル (extreme fractal) で, $\frac{1}{f}$ ゆらぎ ($\frac{1}{f}$ noise) の時,

の3者を区別している. また, 樋口 (1989) は $D \neq 1$ ($\alpha \geq 3$), Mandelbrot (1977) は $D=2$ ($0 \leq \alpha < 1$) としている.

以降, 上記の樋口のフラクタル次元を, D を相関次元 D_2 と区別するために D_H と表記することにする. なお, 上記の関係から, フラクタル次元では白色ノイズと $\frac{1}{f}$ を区別できない. また, Coyt et al. (2013) は, 時系列信号が周期的な場合, $\log_2 L(k)$ vs. $\log_2 k$ のグラフには k の大きな区間で振動が見られることを報告している. さらに, 彼らは, (1) 周期的要素が入り込むこ

とを避けるには, $k(max)$ をできるかぎり小さく取る, (2) 低周波数の周期的成分を同定したければ, $k(max)$ をできるかぎり大きく取る, ことを勧めている.

図12は, 第2節で述べたロジスティック写像について, 樋口の方法による $\log_2 L(k)$ vs. $\log_2 k$ のグラフを示したものである. 図から明らかなように, グラフは, ほぼ直線となっており, この時系列信号がフラクタル特性を有していることがわかる. ちなみに, 樋口のフラクタル次元 D_H の値は2.00035とほぼ2となっている. なお, 姉妹論文で示したこの時系列信号のパワースペクトルがホワイトノイズなどと同様フラットになっているので, ロジスティック写像では上記 $\alpha=0$ と見れる. したがって, ここでの D_H は Mandelbrot の指摘するフラクタル次元の値と一致する.

同じく姉妹論文で取り上げたホワイトノイズ, 及び一様乱数信号でも, 同様な結果が得られる. すなわち, それらの $\log_2 L(k)$ vs. $\log_2 k$ のグラフは共にほぼ直線となり, D_H の値も順に, 1.99806, 1.99959となり, 両者ともほぼ2である.

つぎに, 同じく第2節で述べたサインカーブ時系列について $\log_2 L(k)$ vs. $\log_2 k$ のグラフを示したのが, 図13である. 図から明らかなように, この場合図は k の大きな領域で振動しており, この結果は Coyt et al. (2013) の指摘と一致している. サインカーブ時系列は, フラクタル性を持たないことがわかる.

References

- 合原一幸編 (2000). カオス時系列解析の基礎と応用 産業図書
- Aihara, K., Ikeguchi, T., & Matsumoto, G. (1998). Deterministic nonlinear dynamics of a forced oscillation experimentally observed with a squid giant axon. *International Journal of Chaos Theory and its Applications*, **3**, 5–20.
- Aizawa, Y., & Kohyama, T. (1984). Asymptotically non-stationary chaos. *Progress of Theoretical Physics*, **71**, 847–850.
- 大聖一郎・和田充雄・山口明宏・広奥暢 (2002). バイオメカニズム **16**, 285–298.
- Casdagli, M. C. (1997). Recurrence plots revisited. *Physica D*, **108**, 12–44.
- Coyt, G. G., Diosdado, A. M., Balderas, J. A., del Rio Correa, J. L., & Brown, F. A. (2013). *Revista Mexicana de Fisica S*, **59**, 1–6.
- Eckmann, J. -P., Olliffson Kamphorst, S., & Ruelle, D. (1987). Recurrence plots of dynamical systems. *Europhysics Letters*, **4**, 973–977.
- Fletcher, N. H. (2000). A class of chaotic bird calls? *Journal of*

- the Acoustical Society of Amerika*, **108**, 821–826.
- Grassberger, P., & Procaccia, I. (1983a). Characterization of strange attractors. *Physical Review Letters*, **50**, 346–349.
- Grassberger, P., & Procaccia, I. (1983b). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, **9**, 189–208.
- Hénon, M. (1976). A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, **50**, 69–77.
- Ikeguchi, T., & Aihara, K. (1997). Lyapunov spectral analysis on random data. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **7**, 1267–1282.
- Higuchi, T. (1988). Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory. *Physica D*, **31**, 277–283.
- 樋口知之 (1989). 時系列のフラクタル解析 統計数理 **37**, 209–233.
- 平田祥人 (2011). リカレンスプロット：時系列の視覚化を超えて 数理解析研究所講究録 **1768**, 150–162.
- Hirata, Y., & Aihara, K. (2010). Devaney's chaos on recurrence plots. *Physical Review E*, **82**, 036209.
- 寶来俊介, 山田泰司, 合原一幸 (2002). 同方向リカレンスプロットによる決定論的解析電学論 C, **122**, 141–147.
- Kohyama, T. (1984). Non-stationarity of chaotic motions in an area preserving mapping. *Progress of Theoretical Physics*, **71**, 1104–1107.
- Manneville, P. (1980). Intermittency, self-similarity and $1/f$ spectrum in dissipative dynamical systems. *Journal de Physique*, **41**, 1235–1243.
- Manneville, P., & Pomeau, Y. (1980). Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems. *Physica D*, **1**, 219–226.
- Ngamga, E. J., Nandi, A., Ramaswamy, R., Romano, M. C., Thiel, M., & Kurths, J. (2008). Recurrences of strange attractors. *Pramana*, **70**, 1039–1045.
- Romano, M. C., Thiel, M., Kurths, J., & von Bloh, W. (2004). Multivariate recurrence plots, *Physics Letters A*, **330**, 214–223.
- Russell, D. A., Hanson, J. D., & Ott, E. (1980). Dimension of strange attractors. *Physical Review Letters*, **45**, 1175–1178.
- Sprott, J. C. (2003). *Chaos and Time-Series Analysis*. New York: Oxford University Press.
- Webber, C. L. Jr., & Zbilut, J. P. (1994). Dynamical assessment of physiological systems and states using recurrence plot strategies. *Journal of Applied Physiology*, **76**, 965–973.
- 山田泰司, 合原一幸 (1999). リカレンスプロットと2点間距離分布における非定常時系列解析 電子情報通信学会論文誌, **J82A**, 1016–1028.
- Zbilut, J. P., Giuliani, A., Webber C. L., Jr., & Colosimo, A. (1998). Recurrence quantification analysis in structure-function relationships of proteins: an overview of a general methodology applied to the case of TEM-1 β -lactamase. *Protein Engineering*, **11**, 87–93.

最終版平成27年10月7日受理

Linear and Nonlinear Time Series Analyses and their Applications (2)

Naohito CHINO

Abstract

Recurrence plot and fractal dimension analysis are introduced, both of which can be applicable to various time series signals. Although autocorrelations and powerspectra are valid only if they are stationary, they are well known indicators for detecting properties of these signals in the linear time series analysis. Similarly, Lyapunov exponents are meaningful if the time series under study is ergodic, which are frequently used to examine whether it is chaotic in the nonlinear time series analysis. In contrast, recurrence plot and fractal dimensions have no or few assumptions in application to time series signals. Results of the application of recurrence plot to some artificial time series signals show that, for example, it can certainly be an indicator of chaos. Fractal dimension analysis which is used to detect geometrical property of chaos is also a relatively robust method and it is valid when it is applied to time series signals with self-similarity. Applications of Higuchi's method, which is one of the methods for detecting fractal dimension, to two artificial time series signals show that this method enables us to detect fractal property of these signals when properly applied.

Keywords and phrases: chaos, recurrence plot, fractal dimensions, Higuchi's method