# 数学における数の実在論について

久　馬　栄　道

## 1　はじめに

数学においての数の概念は現在では、自然数、整数、有理数、実数の順番で、整然と集合論の上で構成されている。ここで自然数は、

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

である。整数はこれにマイナスの数を含めた

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

である。有理数は分子分母が整数で分母が 0 でない分数、すなわち

$$\frac{a}{b}\ \text{（}a\text{ は整数、}b\text{ は 0 でない整数）}$$

である。

自然数全体の集合を $\boldsymbol{N}$、整数全体の集合を $\boldsymbol{Z}$、有理数全体の集合を $\boldsymbol{Q}$、実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ として、

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$$

となる。このように集合の概念で数を理解するようになったのは、もちろんゲオルク・フェルディナント・ルートヴィッヒ・フィリップ・カントール（Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor）が集合論を作った以後となる。

さて、本論文の表題に「実在論」という言葉を用いているが、これは “Realism” の和訳であり、本論文においては物事の背後にある本質的な存在の意味で用いることとする。数は数学のいちばん本質的な存在であり、一見集合とは関係なさそうである。しかし、そのさらなる本質的な存在は、現代数学では集合を用いて構成されている。

ところで、この集合による数の構成は、じつは数直線の概念によっている。では、いつからこのような理解になったかというと、それはルネ・デカルト（René Descartes）の著書「幾何学（La Géométrie）」からである。もちろん直線の概念は、古来からあるわけだが、それが数直線という形で数と結びつくためには、長い歴史が必要だったわけである。

それでは、それはどのようにして現代のような形になったのであろうか。それらを本論文で見て行こう。

## 2　古代ギリシャ以前

古来より、数を数えるという行為は、あまりにも自然なことであり、自然数の起源を探ることは、きわめて難しい。しかし、たぶん人類の知性の発生とともに、自然数はあったと思われる。ただし 0 の概念は、後のインド人による。

７つの指、７つの石、７つの星、７つの耳、これらになにがしら共通点があるとわかるためには、**１対１対応**が必要なわけである。1 対 1 対応を行うと、これらは同じ個数だとわかり、個別のものに属していた「７」という数が、単独で導き出される。

また一方、量に対する関心も、人類の知性の発生とともにあったと思われるが、量に関しては、量るというよりは、２つの量の大小を比べるということに関心があったように思える。長さという量の大小は、２つを並べてみれば分かるし、重さという量の大小は、秤にのせてみれば分かる。

ここに単位の長さや単位の重さが現れて、はじめて量るという概念が現れるわけである。しかし、古代世界においては、単位というものは、かなり変化するものであった。

たとえば古代日本においては、大きな建造物を造る場合には、頭領の定規、つまり指矩（さしがね）にあわせて、配下の大工のものも作り直し、長さを統一していたそうである。

これらの量から、現代的な意味の実数の概念が表れるのには、デカルトまで待たねばならない。

## 3　古代ギリシャ

現在では実数という言葉で表しているものは、古代ギリシャには存在しなかった。それに近いものは、「比（logos）」の概念で表されていた。現代的な実数の概念は、デカルトによって導入される単位の長さ 1 の概念や、それから導かれる数直線の概念ができてからである。

比は $a:b$ と書かれる $a$ と $b$ の関係である。厳密には、分数 $\dfrac{a}{b}$ と同じではないが、そのように理解するとわかりやすいこともある。

例えば、今では我々が $\sqrt{2}$ と書くものは、古代ギリシャでは正方形の対角線の長さと辺の長さの比であったが、これは比を分数の意味で考えるとわかりやすい。また $\pi$ と書くものも、円周と直径の長さの比である。

古代ギリシャでは、自然数の比を共測量と呼び、正方形の対角線と 1 辺の比が共測量ではない量、非共測量であることを知っていた。これは現代の言葉で言えば、$\sqrt{2}$ が有理数でないということになり、証明は今では高校の教科書に、背理法の例として出てくる。

ピタゴラス（Pythagoras）はなんらかの宗教と関係のある教団を作っていたらしいが、その教団は共測量を絶対視していたので、正方形の対角線とその辺の長さの比のような非共測量の存在を知ってはいたが、秘密にしていたらしい。

古代ギリシャで、もっともまとまった数学書は、ユークリッド（Euclid）の「原論（Elements)」である。「原論」は全部で 13 巻あるが、その中で比に関して書かれているのが、第 5 巻比例論と第 10 巻非共測量である。この第 5 巻の定義 5. は、今でいうと

$$a : b = c : d$$

を定義しているのであるが、原文を読むと、そうとう複雑である。

> 4 つの量が、第 1 が第 2 に対し、そして第 3 が第 4 に対し、同じ比にあると言われるのは、第 1 と第 3 の等多倍が、第 2 と第 4 の等多倍に対して、それが何倍であろうとも、[第 1 と第 3 の等多倍の] 各々が、[第 2 と第 4 の等多倍の] 各々に対して、あるいは同時に超過するか、あるいは同時に等しいか、あるいは同時に不足するときである。ただしこれら [の多倍] は対応する順序でとられるものとする。

これは $\sqrt{2}$ 倍のような、共測量でないものの等号を、整数倍と大小の比較のみで、定義しているのである。さらに 19 世紀にユリウス・ヴィルヘルム・リヒャルト・デーデキント（Julius Wilhelm Richard Dedekind）がデーデキント切断とよばれるものを用いて、実数論を展開し完成させる考えの基礎となった重要な定義なのである。

しかし、少し見ただけでは、あまりにも明らかなことが書かれていて、さして重要とは思えない。この定義は、どのような場合に、使うのであろうか。

これは、古代ギリシャ人が量というものを幾何学として考えた場合、具体的に値を求めることに興味がなかったということを理解しないといけない。そしてその量に対して、自然数倍するとか、2 つの量の大小を比べるとか、そのような操作しか認めないという態度なのである。

例えば現代であれば、円周率 $\pi$ は精密に周の長さと直径の長さを測り、ある程度の近似値を求めれるかもしれないが、このような方法は使わないのである。

さて $\pi$ の近似値は、$\dfrac{22}{7}$ や $\dfrac{355}{113}$ などいろいろなものが、古来より知られていた。実用上はこれらで十分であるが、これが厳密に $\pi$ と一致しているかどうかという疑問がある。

このことは、現代であれば $\pi$ は有理数でなく無理数であるので、分数で表せられないことは明らかであるが、このことは 18 世紀にヨハン・ハインリッヒ・ランベルト（Johann Heinrich Lambert）と 19 世紀にアドリアン＝マリ・ルジャンドル（Adrien-Marie Legendre）によって証明された結果であるので、とうぜん古代の人は知らないことであった。

そこで、先ほどの定義に従って考えてみよう。

まず適当な円があって、その円周の長さと直径は長さとしてあるが、その長さの値は具体的には測定しないわけである。そこで仮に、円周を $k \times \pi$、直径を $k$ としておこう。これが $\dfrac{22}{7}$ と一致すると仮定すると、現代の書き方だと

$$(k \times \pi) : k = 22 : 7$$

ということであるが、これを先ほどの定義に従って考えると、任意の自然数 $a$ と $b$ において、

$$\Big(a \times (k \times \pi) > b \times k\Big) \iff \Big(a \times 22 > b \times 7\Big) \quad \cdots (1)$$

または

$$\Big(a \times (k \times \pi) = b \times k\Big) \iff \Big(a \times 22 = b \times 7\Big) \quad \cdots (2)$$

または

$$\Big(a \times (k \times \pi) < b \times k\Big) \iff \Big(a \times 22 < b \times 7\Big) \quad \cdots (3)$$

ということになる。$a$ と $b$ は何でも良いので、$a = 7$ で $b = 22$ とし、(2) を考えると、

$$7 \times (k \times \pi) = 22 \times k$$

を考えれば良い。ただし、$k \times \pi$ と $k$ は具体的な長さは分からず、図形上に線分として存在するだけである。

そこで $k \times \pi$ を 7 倍した線分と、$k$ を 22 倍した線分の長さを比べると、等しくはならないので、定義に従えば $(k \times \pi) : k = 22 : 7$ とならないわけである。

これが 19 世紀のデーデキントの実数論につながるわけである。

## 4　デカルトの数直線

古代ギリシャ以後、インド人によるゼロの発見とか、マイナスの数の導入とか、さまざまな数の概念の拡張が行われた。それらの後でデカルトにより、数の実在論は本質的に進展した。

現在では、デカルトにより座標系が導入されたように理解されているが、17 世紀のデカルトの著作「幾何学」を読んでも、そのようなものは出てこない。ではデカルトの何が画期的であったのであろうか。

デカルトの「幾何学」を読むと、まず単位の長さ 1 を平面上に決めると、線の長さの量 $a$ と $b$ に対して、$a \times b$ の長さを作図することができることを示している。方法は、

$$a : 1 = x : b$$

となるように作図すれば $x = a \times b$ となり良い。このような操作は相似形の 3 角形の作図で、簡単に行うことができる。

じつはこれが画期的なのである。たとえば同時代の数学の天才ピエール・ド・フェルマー（Pierre de Fermat）も、長さの量 $a$ と $b$ を古代ギリシャ人のように認識をしていたので、$a \times b$ は面積の量としか解釈できない呪縛からは、自由にはなれなかった。

デカルトのように単位の量 1 を設定すると、$a \times b$ も長さの量として表現できるのである。

つぎに、やはり単位の長さ 1 を平面上で決めると、線の長さの量 $a$ に対して、$\sqrt{a}$ を作図できることを示している。方法は、$\sqrt{p^2 - q^2}$ を作図することは、直角 3 角形を使えばできるので、

$$\sqrt{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2} = \sqrt{a}$$

となるように作図してやれば良いのである。

このあとデカルトは、古代ギリシャより難問として考えられてきた「パッポス（Pappos）の問題」を、単位の長さ 1 があれば、線分の長さの方程式として考えることができることを示している。

このパッポスの問題は、ユークリッドをはじめ古代の数学者を悩ませてきた問題だが、デカルトが切り開いた解析幾何学のおかげで、今では高校生でも解くことが可能な問題となった。数学は、本質的に進歩しているのである。

このデカルトによる幾何学平面上の単位の長さ 1 のおかげで、現在我々が思い描く数直線の概念ができあがった。直線を単位の長さ 1 に 10 のベキ乗を整数倍したものをかけて区切れば、それは 10 進数を表す数直線となる。$n$ 進数の数直線も同じように作れる。

## 5　デーデキントの実数論

19 世紀になると、数学を基礎づける学問が、急速に発展した。そしてデーデキントとカントールは、それぞれの方法で、実数を基礎づけることに成功した。

彼らのやった仕事をおおまかに言うと、有理数を用いて実数の本質を浮かび上がらせ、17 世紀のニュートン、ライプニッツの微分積分学では不正確であった実数の扱いを、厳密に扱えるようにしたということである。カントールはコーシー列と呼ばれるものを用いて実数を定義したが、ここではデーデキントの仕事を紹介しよう。

デーデキントは 1872 年の「連続性と無理数」において、今ではデーデキント切断と呼ばれる概念を示した。これは現在では、1887 年に書かれた「数とは何か、何であるべきか」と合わせて、河野伊三郎先生の訳で、

デーデキント著, 「数について」, 岩波文庫, 1961 年（現在絶版）

で読むことができる。

さて、有理数全体の集合を $\boldsymbol{Q}$ とするとき、

$$A \cup B = \boldsymbol{Q} \quad A \cap B = \phi \quad A \neq \phi \quad B \neq \phi$$

であり、

$$\text{すべての } a \in A \text{ と、すべての } b \in B \text{ で } a < b$$

となる $A$ と $B$ の組み $(A, B)$ を、$\boldsymbol{Q}$ のデーデキント切断という。このデーデキント切断を用いると、数直線上の任意の点を、$A$ と $B$ の境界で表すことができる。

たとえば数直線上の $\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ の点は、

$$A = \left\{ q \in \boldsymbol{Q} \mid q < \sqrt{2} \right\} \qquad B = \left\{ q \in \boldsymbol{Q} \mid \sqrt{2} < q \right\}$$

とすれば良い。

$$\frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10} \quad \frac{141}{100} < \sqrt{2} < \frac{142}{100} \quad \frac{1414}{1000} < \sqrt{2} < \frac{1415}{1000} \quad \frac{14142}{10000} < \sqrt{2} < \frac{14143}{10000} \quad \cdots$$

なので、

$$\begin{array}{lllll} \frac{14}{10} \in A & \frac{141}{100} \in A & \frac{1414}{1000} \in A & \frac{14142}{10000} \in A & \cdots \\ \frac{15}{10} \in B & \frac{142}{100} \in B & \frac{1415}{1000} \in B & \frac{14143}{10000} \in B & \cdots \end{array}$$

となり、$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ に、好きなだけ近い有理数ではさみこめることがわかる。

このように数直線上の点を、有理数との比較で表そうとするのは、本質的には前に紹介したユークリッドの「原論」の第５巻の定義 5. と同じである。

数直線上の点は、このようにデーデキント切断 $(A, B)$ によって表すことができるので、デーデキント切断 $(A, B)$ そのものを数直線上の点そのものと思っても良い。つまり数直線上の点の実在論、すなわち実数の実在論は、じつは有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ によって構成されるデーデキント切断 $(A, B)$ だと思って良いわけである。

## 6　デーデキントによる自然数の構成とその後の発展

さらにデーデキントは、1887年に書かれた「数とは何か、何であるべきか」において、今日ではデーデキント無限と呼ばれる概念を導入し、デーデキント無限から自然数全体の集合を構成してみせた。

これも前出のデーデキント著「数について」の後半に入っている。

まずデーデキント無限であるが、これは集合 $D$ の上の単写像 $f$ が存在し、$d \in D$ が存在し、$f(x) = d$ となる $x \in D$ が存在しないとき、$D$ をデーデキント無限とよぶ。通常、無限集合はすべてデーデキント無限である。

さてデーデキントの基本アイデアは、デーデキント無限から

$$d \quad f(d) \quad f(f(d)) \quad f(f(f(d))) \quad \cdots$$

という系列を集めて新たな集合をつくり、$d$ を自然数の 0 とみなし、$f(x)$ を 自然数 $x$ の次の数、つまり 1 を加える操作だとみなして、この系列が自然数全体の集合と同じ構造をしていることを示す、というものである。

そのためにまず

$$G = \left\{ F \,\middle|\, \big(F \subset D\big)\text{かつ}\big(d \in F\big)\text{かつ}\big(\text{すべての } x \in F \text{ で } f(x) \in F\big) \right\}$$

という集合を作り、さらに

$$M = \bigcap_{F \in G} F$$

としてやればよい。しかし、これらはかなり複雑な集合の操作を必要とする。

このことは、デーデキントと親交のあったカントールが集合論を作るきっかけとなった。カントールの作った集合論を用いると、これらの集合の操作を行うことができる。

デーデキントは $M$ が集合の性質として、現在我々が「ペアノの公理」と呼んでいるものと同じ性質を持っていることを示し、そこから自然数の性質を導き出した。$M$ を自然数全体の集合として扱うときは $\boldsymbol{N}$ と書くこととする。

ここまで、集合論を用いると、デーデキント無限から自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ が構成できることを紹介した。さらに $\boldsymbol{N}$ から整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ や、有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ を構成できることは簡単である。また有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ から、デーデキント切断を用いて実数と同じものを作ることができることは先ほど示したので、それら全体を集めてくると、実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ を構成してやることができる。

つまり $\boldsymbol{N}$ や $\boldsymbol{Z}$ や $\boldsymbol{Q}$ や $\boldsymbol{R}$ などの実在論は、デーデキント無限の存在に依存しているのである。

デーデキントは「数とは何か、何であるべきか」で、

> 「私の思考の世界、すなわち私の思考の対象となり得るあらゆる事物の全体 $S$」
> がデーデキント無限である。

ということを証明し、これよりデーデキント無限の存在を示した。しかし「私の思考の対象となり得るあらゆる事物の全体 $S$」は、あらゆる集合の集合を含むような巨大な集合だから、今日の立場ではこのような証明は認められない。

現代の数学では、カントールの集合論においてはラッセルのパラドックスが生じるので、それを改良した公理的集合論の上で展開するのが普通である。その公理的集合論では、デーデキント無限の存在は「無限公理」によって導かれる。

このように現在の数学では、数の実在論は公理によっており、それを集合論の操作によって、自然数や実数を構成しているのである。

現代数学は公理的集合論の上に展開するのが一般的なのであるが、それは上のように理解されないといけないわけである。

## 参考文献


[Tabak 2005]　Tabak, J., 松浦俊輔訳, 「はじめからの数学３、数」, 青土社, 2005

[Kline 2011]　Kline, M., 中山茂訳, 「数学の文化史」, 河出書房新社, 2011

[斉藤 1997]　斉藤憲著, 「ユークリッド『原論』の成立」, 東京大学出版会, 1997

[Euclid 2008]　Euclid, 斎藤憲訳, 三浦伸夫訳,「エウクレイデス全集〈第 1 巻〉原論 1 - 6」, 東京大学出版社, 2008

[Descartes]　Descartes,R., 青木靖三他訳, 「デカルト著作集　第 1 巻」, 白泉社,

[Dedekind 1872]　Dedekind, R. , “Stetigkeit und irrationale Zahlen （連続性と無理数）”, 1872

[Dedekind 1887]　Dedekind R. , “Was sind und was sollen die Zahlen? （数とは何か、何であるべきか）”, 1887

[Dedekind 1961]　Dedekind R. , 河野伊三郎訳, 「数について」, 岩波文庫, 1961 年

[久馬 1995]　久馬栄道, 「Q & A 数学基礎論入門」, 共立出版, 1995 年

[田中 2005]　田中尚夫, 「選択公理と数学」, 遊星社, 2005 年

[飯田 2007]　飯田隆編集, 「哲学の歴史 11、論理・数学・言語」, 中央公論新社, 2007