愛知学院大学心身科学部紀要第6号（119–128）（2010）

〈総説〉

統計的独立性とその周辺(1)

千　野　直　仁*

1　はじめに

心理学をはじめとする社会・行動科学の分野ならびに医学・歯学・薬学の一部の分野では，データ解析に際して，統計的検定を行うことが多い．数ある統計的検定の中でも，2群の平均の差の検定や各種分散分析は，これらの分野ではとりわけ基本的な統計的検定法としてよく用いられている．

しかし，これらの基本的な検定方法にも，統計学の専門家以外にはあまり知られていない幾つかの問題点がある．例えば，対応のない場合の2群の平均の差の検定では，内外の標準的あるいは入門的テキストの多くでは，平均の差の検定に先立ち両群の分散の等質性のF検定を行い，等質性が採択される場合には通常のt検定を，棄却される場合には例えばWelch法（Sattethwaite法と呼ばれることもある）等によるt検定を行う，と書かれている．

ただし，平均の差の検定，とりわけ対応のない場合の平均の差の検定には，最低2つの大きな問題が横たわっている．1つは，よく知られているもので，そもそも分散が異なる2群で平均の差の検定（いわゆる**ベーレンス・フィッシャー問題**(the Behrens-Fisher problem)）を行うことには意味があるのか，という問題である．例えば，竹内(1973)は，「この問題自体は純粋な形では非現実的なものであるということができると思う」と述べている．

対応のない場合の2群の平均の差の検定におけるもう1つの重要な問題は，この検定では，通常F検定とt検定という統計検定をこの順で続けて2つ行う（すなわち一種の**逐次検定**(sequential test)）ことによる検定全体の統計的過誤のコントロールの問題である．これに対する対処法について記述しているテキストは，本邦においても欧米においても筆者の知る限り極めて少ない．

そのような状況の中で，まず本邦では竹内(1973, p. 19)は，上記のコントロールの問題に対して「ここで，二つの検定の水準は，仮説$\mu_1 = \mu_2$，$\sigma_1 = \sigma_2$の下で，二つの検定でともに仮説が捨てられない確率が，ちょうど$1-\alpha$になるように定めなければならない」としている．一方，永田(2008, p. 100)は「この前段階のF検定は有意水準20％で行う」としている．その理由として，彼は当該F検定における第2種の過誤を小さくすることをあげている．

われわれは，これら2つのコントロールの方式を，どう評価すべきであろうか．まず，竹内の方式では，平均の差の検定に際しての一種の逐次検定全体の危険率のコントロールのみに言及しているのに対して，永田の方式は前段階のF検定に際しての第2種の過誤を問題にしている点が，大きく異なる．また，永田は平均の差の検定に先立つ分散の等質性の検定を「予備検定」と位置付けているが，逐次検定全体の危険率には言及しておらず，その結果，分散の等質性が成り立つ場合，上記のようにF検定を有意水準20％で行うとすると，その後のt検定を例えば通常の5％有意水準で行うと，全体的危険率はおよそ24％にインフレすることにはふれていない．

また，例えば反復測定デザインではない通常の分散分析では，国際的統計ソフトのSASやSPSSでは，平方和についてはType IからType IV平方和という要因の効果の検定に際しての要因の投入順序に関する違いやデザインの違いなどについては述べているが，複数の要因の効果を見るためのデザインにおける全体的危険率について議論していないし，内外の分散分析の専門書でさえ，これについて議論しているものはきわめて少ない．例えば，実際，完全無作為化要因デザインANOVAにおいて，よく知られた通常の主効果や交互作用項のF統計量間は独立ではないことは，専門書でさえほとんど議論していない．また，この場合，どの

*愛知学院大学心身科学部心理学科
（連絡先）〒470–0195 愛知県日進市岩崎町阿良池12　E-mail: chino@dpc.agu.ac.jp

ように平方和を工夫すれば，対応するF統計量が相互に独立になり，その結果検定全体の危険率の正確な計算ができるかについても述べられていない．これについては，既に Hogg (1961) が明確な結論を出しているにもかかわらずである．

上記の問題は，広義には Kitagawa (1950) のいう推測過程論の1つの問題とみることができ，Bancroft (1944) にはじまる**予備検定** (preliminary test) の研究，Dodge & Roming (1929) や Mahalanobis (1940) に源流があるとされ Wald (1945, 1947) が発展させた**逐次解析** (sequential analysis) や，分散分析における Naik (1975), Marcus et al. (1976), Holm (1979) にはじまる**逐次多重比較手続き** (sequential multiple-comparison procedures) の研究などとの関連の有無についても興味が尽きないが，ここでは話題をとりあえず複数の統計量間の統計的独立性の視点からのみまとめることにする．その理由は，統計量間の独立性の有無をきちんと整理できれば，少なくとも上の2つの問題についてどのように対応すべきかが明確になるし，のちに見るように統計学の分野でこれまで十分わかっていなかった問題の一部への解決策も見いだせるからである．

この論文の構成は，つぎのようである．第2節では，数学の分野における各種独立性の定義にはどのようなものがあるかをレビューする．第3節では，それらのうちの1つである，確率変数や統計量の独立性に関する定理を整理する．第4節では，第3節の幾つかの定理の理解のために必要な数理統計学上の幾つかの基本的概念のうち統計量の独立性にとって本質的に重要と思われる2つの概念，すなわち補助統計量及び完備統計量の定義・定理とそれらの意味に言及する．第5節では，独立性定理の応用例について述べる．

2　各種独立性の定義

数学の分野で定義される**独立性** (independence)（独立性がない時，**従属性** dependence があるという）の概念には，少なくとも3種類存在する．それらは，**代数的独立性** (algebraic independence)，**線形代数的独立性** (linear algebraic independence)，及び**統計的独立性** (statistical independence) である．

まず，代数的独立性は，数学辞典 (2007, p. 778) によれば，つぎのように定義される．

定義1（代数的従属性， algebraic dependence)

Kは体kの**拡大体** (extended field) とする．Kの元vがKの元 $u_1, \cdots, u_r$ にK上代数的従属であるとは，vが $K(u_1, \cdots, u_r)$ 上**代数的** (algebraic) であることをいう．

一方，Kの部分集合SがK上**代数的独立** (algebraically independent) とは，任意の $u \in S$ が，Sに属する他の如何なる有限個の元 $K(u_1, \cdots, u_r)$ に関しても代数的従属でないことをいう．

ここで，Kの元 α がk代数的であるとは，α がkの元を係数とする零でないある多項式 $f(X)$ の根であることをいう．

つぎに，線形代数的独立性には，Bloom (1979, pp. 87–93) によれば，**線形従属・独立** (linear dependence and independence) と**重心従属・独立** (barycentric dependence and independence) がある．後者の定義は，ここではふれないが，例えば Bloom (1979, p. 156) を参照のこと．線形従属・独立とは，

定義2（線形従属性， linear dependence)

(i) nを正整数とし，$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は（必ずしも相異なる必要はない）1つのベクトル空間V上のベクトルとする．順序つきのn項ベクトル $(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$ は，もし，

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

を満たす体F上の必ずしもすべてがゼロではないスカラー $a_1, \cdots, a_n$ が存在するならば，体F上で**線形従属** (linearly dependent) であるといわれる．

(ii) 線形独立は，線形従属でないことを意味する．そこで，n項ベクトル $(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$ は，つぎの言明が真の時のみ線形独立である：(1) 式が成り立つときはいつでも $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

つぎに，統計的独立性については，例えば Rao (1973, pp. 90–91) がきちんとした定義を与えている：

定義3（統計的独立性， statistical independence)

もし $P(B \mid A) = P(B)$ ならば，事象Bは事象Aと統計的に独立という．この場合，

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \tag{2}$$

が成り立つ．

これに対して，$P(A \mid B) = P(A)$ ならば，事象Aは事象Bと独立である．

また，2つの事象は (2) 式が成り立つならば独立であるといわれる．ここで，この式はP(A) あるいはP(B) がゼロの場合も含む．

なお，よく知られているように，事象Aのもとで

事象 B の起こる**条件付き確率** (conditional probability) は，$P(A)\neq 0$ として，

$$P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A), \tag{3}$$

また 3 つ以上の事象の独立性については，

事象 $A_1, A_2, \cdots$ は，それらのうちからどんな n 個の事象 $A_{i_1}, \cdots, A_{i_n}$ を選んでも，次の式が成り立つならば，独立である：

$$\begin{aligned} &P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap, \cdots, \cap A_{i_n}) \\ &= P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_n}), \quad n = 2, 3, \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

3　確率変数や統計量の独立性に関する定理

この節では，前節で定義された幾つかの独立性（従属性）の定義のうちの統計的独立性に絞り，事象の独立性を複数の確率変数や統計量の独立性の問題に適用した場合の定理についてまとめる．

まず，前節の統計的独立性の定義において，事象の代わりに任意の確率変数の変域に置き換えることにより，次に示す同時分布の**分布関数** (distribution function) の分解可能性による確率変数の独立性の定理に導かれる：

定理１（同時分布の分布関数の分解可能性による独立性）

k 次元確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ は，その同時分布の分布関数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を，

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \cdots, x_k) \\ &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_k \leq x_k), \end{aligned} \tag{5}$$

とする時，すべての $x_1, x_2, \cdots, x_k$ に対して，

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_k) = F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_k(x_k), \tag{6}$$

が成り立つ時，互いに独立 (mutually independent) である．

うえの定理のきちんとした証明は，例えば 2 変量の場合，Anderson (1984, pp. 10–11) が示している．

つぎに，うえの定理を用いると，同時**特性関数** (characteristic function) の分解可能性による確率変数の独立性の定理が導かれる（例えば，Kendall & Stuart, 1973, pp. 111–112）：

定理２（同時分布の特性関数の分解可能性による独立性）

k 次元確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ は，その同時分布の特性関数 $\phi(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ を，

$$\phi(t_1, t_2, \cdots, t_k) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{\sum_{j=1}^{n} i\, t_j x_j\right\} dF_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \tag{7}$$

とする時，すべての $t_1, t_2, \cdots, t_k$ に対して，

$$\phi(t_1, t_2, \cdots, t_k) = \phi_1(t_1)\phi_2(t_2)\cdots\phi_k(t_k), \tag{8}$$

が成り立つ時，互いに独立 (mutually independent) である．

上記の 2 つの定理は，複数の確率変数の独立性に関する定理であるが，つぎの Basu (1955)，Hogg & Craig (1956)，及び Hogg (1961) の定理は，統計量とりわけ尤度比統計量に関するものである．統計量は一般にはデータの関数であり，データが得られた母集団の分布が仮定できれば当然それはある種の確率分布に従うので，通常の確率変数と変わらない部分もあるが，ここでは両者を区別することにする．ちなみに，尤度比検定統計量は帰無仮説のもとで漸近的にカイ 2 乗分布に従うことはよく知られている．

定理３（Basu, 1955）

もし T が**有界的完備充足統計量** (boundedly complete sufficient statistic) ならば，θ と独立などんな統計量 T_1 も統計的に T と独立である．

一方，Lehmann (1983, p. 46) の定理5.5では，うの定理の中の「θ と独立などんな統計量 T_1 も」という表現を，「どんな補助統計量も」で置き換え，つぎのように紹介している：

Theorem 5.5（Basu's theorem）

もし T が族 $P = \{P_\theta, \theta \in \Omega\}$, に対する完備充足統計量ならば，どんな補助統計量 V も T と独立である．

定理４（Hogg & Craig, 1956）

$f(x; \theta_1, \cdots, \theta_q)$ がつぎの形

$$Q(\theta_1,\cdots,\theta_q)M(x)exp\left\{\sum_{j=1}^{q}p_j(\theta_1,\cdots,\theta_q)K_j(x)\right\},$$
$$a<x<b, \quad (9)$$

をした確率密度関数で，つぎの4条件を満たすとする：

1．$M(x)$ は非負で連続，
2．$K_j'(x)$ は連続で一次独立，
3．p_j は連続で，$(p_1, \cdots, p_q)$ により仮定される1組の値は非退化q–次元区間を含む，
4．a と b は，θ_j に依存しない．

また，$x_1, \cdots, x_n, (q<n)$ は x の n 個の値を持つ無作為標本であり，q 個の統計量 $z_j=\sum_{i=1}^{n}K_j(x_i)$, $j=1, \cdots, q$ は q 個の母数の同時充足統計量であるとする．

この時，統計量 T が同時充足統計量 z_j と統計的に独立であるための必要十分条件は，T の分布が母数 $\theta_j, j=1, \cdots, q$ の制約を受けない（free）ことである．

定理5（Hogg, 1961）

全母数空間 $\Omega=\omega_0$ に対して，k個の部分集合 ω_i, $i=1, 2, \cdots, k$ が $\Omega=\omega_0 \supset \omega_1 \supset \omega_2 \supset \cdots \supset \omega_k$ であるとする．ここで，帰無仮説 H_0 を対立仮説 H_1 に対して，次の仮説を反復的に検定することにより検定するとする：

$$H_0^i: \theta \in \omega_i \quad against \quad H_1^i: \theta \in \omega_{i-1}-\omega_i,$$
$$i=1,2,\cdots,k. \quad (10)$$

ここで，H_0^i の検定は H_0^{i-1} が採択されたときのみ行うとする．この時，H_0 は，すべての仮説 $H_0^1, \cdots, H_0^k$ が採択された時のみ，採択される．この時，H_0^i を H_1^i に対して検定するための尤度比検定統計量は，

$$\lambda_i=\frac{L(\hat{\omega}_i)}{L(\hat{\omega}_{i-1})}, \quad i=1,2,\cdots,k. \quad (11)$$

そこで，H_0 を H_1 に対して検定するための尤度比 λ は，

$$\lambda=\frac{L(\hat{\omega}_k)}{L(\hat{\omega}_0)}=\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{L(\hat{\omega}_i)}{L(\hat{\omega}_{i-1})}\right\}=\prod_{i=1}^{k}\lambda_i. \quad (12)$$

一般に，λ のこのような分解方法は幾通りか考えられるが，分解を適切に選べば，上記逐次検定を行うための統計量相互がすべて統計的に独立であるようにすることがしばしば可能である．

ここで，次に $H_0^i: \theta \in \omega_i$ のもとで，これらの**局外母数**(nuisance parameters) に対する完備充足統計量が存在するとする．この時，Basu (1955) 及び Hogg & Craig (1956) の独立性定理より，λ_i はこれらの完備充足統計量と確率的に独立 (stochastically independent) である．通常，λ_i に続く尤度比 $\lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_k$ は，これらの完備充足統計量の関数なので，λ_i, $i=1, 2, \cdots, k-1$ はこれらの完備充足統計量と確率的に独立 (stochastically independent) である．これらより，上記の条件が満たされるならば，尤度比 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ は，確率的に相互に独立である．

ここで，Hogg の定理では，帰無仮説に対応する複数の部分母数空間に対して**階層的構造** (hierarchical structure) を仮定していることに注意が必要である．

うえの Hogg の定理で，もう1つ注意しないといけない点は，うえの定理では，ある一般的なカイ2乗統計量（すなわち，複数の帰無仮説が階層構造を持つ場合の尤度比カイ2乗統計量）間の独立性を議論している点である．その結果，議論の対象となる統計量は，**正確な** (exact) カイ2乗統計量ではなく，漸近的カイ2乗分布をする統計量である点に注意が必要である．これに対して，従来よく知られているカイ2乗統計量間の独立性に関する定理は，正確なカイ2乗統計量に関するつぎの定理である（例えば，Rao, 1973, pp. 185–189）：

定理6（**Fisher-Cochran の定理**）

$Q_1, \cdots, Q_k$ が階数 $n_1, \cdots, n_k$ の k 個の2次形式で，$\boldsymbol{y}^t\boldsymbol{y}=Q_1+\cdots+Q_k$ を満たすとする．この時，$Q_i \sim \chi^2(n_i, \lambda_i)$ であり独立であるための必要十分条件は，$n=\sum n_i$ である．ここで，もし $Q_i=\boldsymbol{y}^t\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{y}$ であり，$\sum\mu_j^2=\sum\lambda_i$ ならば，$\lambda_i=\boldsymbol{\mu}^t\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{\mu}$ である．

但し，うえの定理はいわゆるコクランの定理として知られているもののうち，最も一般的なもので，非心カイ2乗分布を仮定している．これに対して，よく知られた（中心）カイ2乗分布を仮定した定理は，つぎのようになる（例えば，国沢，1968）：

定理7（**Cochran の定理**）

正規母集団 $N(0, 1)$ からの標本変量 $(X_1, \cdots, X_n)$ により階数 n_i の2次形式 $Q=\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ を作り，$Q_1+\cdots+Q_s=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ となるようにする．

この時，$Q_i\,(i=1, \cdots, s)$ が互いに独立な変量であり，かつ自由度 n_i の χ^2 分布に従うための必要十分条

件は，$n_1 + \cdots + n_s = n$ である．

うえの幾つかの定理のうち，Basu や Hogg らの定理をきちんと理解するためには，数理統計学の基本的な概念としての（単一）統計量の**充足性** (sufficiency),（複数統計量の）**同時充足性** (joint sufficiency)，**最小充足性** (minimal sufficiency)，**尤度比検定** (likelihood ratio test) 等の概念は言うまでもなく，それらに加えて，**補助統計量** (ancillary statistic)，**完備統計量** (complete statistic) 等の概念の正確な理解が必要である．次節では，上記の幾つかの数理統計学の基本的な概念について読者は既知であるとし，最後の 2 つの概念について述べる．

4 補助統計量・完備統計量の定義・定理とそれらの意味

まず，補助統計量については，つぎに例えば Lehmann (1983, pp. 45–46) による定義を示す：

定義 4（補助統計量，及び一次補助統計量）

（任意の）統計量 $V(X)$ は，もしその分布が母数 θ に依存しなければ**補助的** (ancillary) と，又もしその期待値 $E_\theta(V(X))$ が定数で θ に依存しなければ**一次補助的** (first-order ancillary) と呼ばれる．

この定理の重要性は，つぎのようである．一般に，我々がサイズ n なる標本を手にした時，単一パラメータ θ（例えば母平均）に対する（単一）推定量（統計量）t（例えば，標本平均 $\bar{x}$）が標本のすべての情報を含む時，充足性（あるいは十分性）がある，という．よく知られているように，統計量の充足性の判定には，**分解基準** (the factorization theorem) あるいは別名**ネイマン基準** (the Neyman criterion) が知られている．また，一般に任意の統計量が充足性を持つための必要条件は，（母集団）分布が**指数族分布** (the exponential family of distribution) となること，である．さらに，例えば，母数 θ に対する単一充足統計量が存在するならば，θ の**最尤推定量** (maximum likelihood estimator) はその関数であることもよく知られている．これらについては，例えば Kendall & Stuart (1973) を参照のこと．

Lehmann (1983, pp. 45–46) によれば，何が統計量の充足性を本質的なデータの（持つ情報の）縮約へと導くかを議論することが必要である．彼によれば，そのような縮約を達成するための充足統計量の力は，それが含む補助情報 (ancillary information) の量に関係していると考える．彼によれば，補助統計量はそれ自身は θ についての如何なる情報も含まないが，最小充足統計量はそれ自身未だ多くの補助的な素材を含んでいる．そこで，補助統計量は，もし如何なる非定数関数も補助的でないならば，データの縮約に最も成功したことになる．これに関わるのが完備（充足）統計量である．ただし，統計量の完備性については，もとは分布の母数族のそれから出発しているので，ここでも最初に分布の母数族のそれについて，つぎに統計量のそれについての定義を紹介する．前者の完備性についての定義は，例えば Kendall & Stuart (1973, p. 199) によれば：

定義 5（分布の母数族の完備性）

ある母数（ベクトル）$\boldsymbol{\theta}$ に依存する 1 変量もしくは多変量分布の 1 つの母数族を $f(x/\boldsymbol{\theta})$ とする．ここで，$h(x)$ は $\boldsymbol{\theta}$ とは独立な任意の統計量とする．もし，すべての $\boldsymbol{\theta}$ に対して

$$E\{h(x)\} = \int h(x) f(x/\boldsymbol{\theta}) dx = 0, \tag{13}$$

が恒等的に

$$h(x) = 0, \tag{14}$$

を意味するならば，当該母数族 $f(x/\boldsymbol{\theta})$ は，**完備** (complete) と呼ばれる．この表現は，この場合分布族のすべての成員に直交する如何なる非ゼロ関数も見つけられないということなので，適切である．もし，(13) 式がすべての**有界な** (bounded) 関数 $h(x)$ に対してのみ (14) 式を意味するのであれば，$f(x/\boldsymbol{\theta})$ は，**有界的完備** (boundedly complete) であると呼ばれる．

この定義から分かるように，分布の母数族の完備性は，分布族 $f(x/\boldsymbol{\theta})$ と，そこから得られる標本から構成される統計量 $f(x)$ との**直交性** (orthogonality) に関わるものである．なぜならば，(13) 式の積分がゼロということは，明らかに 2 つの関数の内積がゼロであることを意味しており，それ故に2つの関数の直交性を意味すると見れるからである．例えば，Chino (1998) は，一般の複素値を取る 2 つの連続関数 $f(x)$ 及び $g(x)$ 間の内積の例を示している：

$$< f, g >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \tag{15}$$

ここで，$\overline{g(x)}$ は，$g(x)$ の複素共役関数を表すものとする．

言い換えれば，定義 5 は，当該分布の持つ情報と無関係な新たな情報は，そこから抽出されるデータ x の関数 $h(x)$ からは，たとえどんなに分布族の成員を変えても（$\boldsymbol{\theta}$ を動かしても）得られない，という性質を述べており，そのような時分布族は完備であると言っている．

それでは，どんな母数族が分布の完備性を備えているのであろうか．例えば Kendall & Stuart (1973, pp. 199–200) には，最初の例として母数 1 つの指数族分布でつぎのような特別の形をした分布を上げている：

$$f(x/\theta) = exp\{\theta x + C(x) + D(\theta)\},\quad -\infty \leq x \leq \infty. \tag{16}$$

この分布が完備であることを，彼らは**2方向ラプラス変換** (the two-sided Laplace transform of a function $g(x)$)

$$\lambda(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(\theta x) g(x) dx, \tag{17}$$

を紹介しながら，同変換の**一意性特性** (the uniqueness property) を用いて証明している．これは，例えば Lehmann & Scheffé (1950) にある**一意性定理** (the unicity theorem) に他ならない．

うえの母数族を多重母数の場合に拡張したのが，つぎの母数族であり，こちらも完備性を持つ：

$$f(x/\boldsymbol{\theta}) = exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \theta_j x_j + C(\boldsymbol{x}) + D(\boldsymbol{\theta})\right\}. \tag{18}$$

それでは，よく知られた正規分布は完備性を持っているのであろうか．実は，平均 μ，分散 σ^2 なる正規分布は，指数族の**標準形** (canonical form) にした場合，平均が定数でなければ 2 つの標準母数（これらは，もとの平均 μ，分散 σ^2 とは異なる）は独立であるが，どちらかの通常の母数が既知の場合, 少し複雑である．というのは，例えば Kendall & Stuart (1973) も指摘しているように，分散 σ^2 が既知の正規分布族（例えば $\sigma^2 = 1$）は，平均 μ に関して完備であるが，平均が既知（例えば $\mu = 0$）の正規分布族は，分散 σ^2 に関して完備でもなく有界的完備でもない．前者の証明にはラプラス変換の一意性定理が用いられるが，後者が完備性を持たないことの証明には，この分布族の密度が x の偶関数であることが用いられる．

その他，カイ 2 乗分布，ガンマ分布，ポアソン分布，二項分布などの指数族分布，並びに超幾何分布，中央値がゼロのコーシー分布などが完備性を持つことが知られている（上記 Kendall & Stuart, 1973; Lehmann & Scheffé, 1950 など）．

つぎに，統計量の完備性の定義について紹介する．例えば，Kendall & Stuart (1973, p. 199) によれば，完備性の概念の統計的適用に際しては，分布の母数族ではなく，しばしば統計量 t の標本分布，$g(t/\boldsymbol{\theta})$ に関心がある．

定義 6（統計量の完備性）

$$E\{h(t)\} = \int h(t) g(t/\boldsymbol{\theta}) dt = 0, \tag{19}$$

が恒等的に

$$h(t) = 0, \tag{20}$$

を意味するならば，当該統計量 t は，**完備** (complete) と呼ばれる．

つまり，われわれは統計量 t に対して，その分布の完備特性を付与するのである．いずれにせよ，それでは統計量は具体的にどのような場合，完備性を持つのであろうか．これについては，例えば Lehmann (1983, p. 46) の定理5.6，あるいはこれと同等の別表現を行っている Lehmann (1986) の定理 1 が知られている．前者の定理の証明は，Lehmann (1983) によれば，Barndorff-Nielsen (1978) にある．つぎの定義は，Lehmann (1983) による：

定理 8（統計量の完備性）

もし X がつぎの指数族分布

$$p(x, \eta) = exp\left\{\sum_{i=1}^{s} \eta_i T_i(x) - A(\eta)\right\} \phi(x), \tag{21}$$

に従い，かつ**フルランク** (full rank) ならば，統計量の組 $T = \{T_1(x), \cdots, T_s(x)\}$ は完備である．

5 Hogg の独立性定理の応用例

この節では，最初に既に Hogg (1961) にあげられている彼の定理の応用例のうち，紙面の都合上平均の差の検定の問題のみを紹介する．つぎにこの定理を数理統計学の分野で開発されてきた対称性関連の検定に応

用する試みについて紹介する．

応用例 1

まず，最初の応用例は，この論文の第 1 節であげた，平均の差の検定に対する Hogg の定理の彼自身による適用結果である．この検定では，通常平均の差の検定に先立ち，分散の等質性についての F 検定をすることはよく知られている．この場合，分散の等質性の検定に続く平均の差の検定における 2 つの統計量 F と t 間の統計的独立性の問題は，Hogg の定理（第 3 節の定理 5）で $k=2$ の特別のケースである．既に第 1 節で述べたように，分散が等質な場合に限って F 統計量と t 統計量は統計的に独立になる．ここでは，それを少し敷衍して以下に説明する：

2 組の標本 $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n_1}$ 及び $x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n_2}$ は，それぞれ対応のない 2 つの正規母集団 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 及び $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ から無作為に抽出されたものとする．

この時，全母数空間 $\Omega=\omega_0$ は，

$$\Omega=\{(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2);\quad -\infty<\mu_i<\infty,\quad \sigma_i^2,\quad i=1,2\}. \tag{22}$$

これに対して，等分散に関わる部分空間 ω_1 を，

$$\omega_1=\{(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2);\quad -\infty<\mu_i<\infty,\quad i=1,2,\quad \sigma_1^2=\sigma_2^2>0,\}, \tag{23}$$

さらに，等平均及び等分散に関わる部分空間 ω_2 を，

$$\omega_2=\{(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2);\quad -\infty<\mu_1=\mu_2<\infty,\quad \sigma_1^2=\sigma_2^2>0,\}, \tag{24}$$

最後に，等平均（仮説）に関わる部分空間 ω_3 を，

$$\omega_3=\{(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2);\quad -\infty<\mu_1=\mu_2<\infty,\quad \sigma_i^2,\quad i=1,2\}, \tag{25}$$

とする．

この時，まず明らかに $\Omega=\omega_0\supset\omega_1\supset\omega_2$ が成り立つ．つぎに，分散の等質性に関する帰無仮説 $H_0^{(1)}$: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ のもとでの平均に関する帰無仮説 $H_0^{(2)}$: $\mu_1=\mu_2, \sigma_1^2=\sigma_2^2$ の検定のための 2 つの統計量 F 及び t が独立であることの証明は，つぎのようになる．この場合の全母数空間 $\Omega=\omega_0$ に対して，$H_0^{(1)}$ のもとでの母数空間は ω_1 であり，対応する F 統計量は，

$$F=u_1^2/u_2^2,\quad u_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2,$$

$$u_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2, \tag{26}$$

一方，$H_0^{(2)}$ のもとでの母数空間は ω_2 であり，t 統計量は，

$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{n_1s_1^2+n_2s_2^2}}\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}. \tag{27}$$

である．

ここで，Hogg (1961) の定理から，$k=2$ の場合，一般に次式が成り立つ：

$$\lambda=\frac{L(\hat{\omega}_2)}{L(\hat{\omega}_0)}=\frac{L(\hat{\omega}_1)}{L(\hat{\omega}_0)}\frac{L(\hat{\omega}_2)}{L(\hat{\omega}_1)}=\lambda_1\lambda_2=\lambda_1(F)\,\lambda_2(t). \tag{28}$$

ここで，(28) 式の右辺第 1 項 λ_1 は，上記 2 組の標本が得られたときのデータの無条件同時尤度の最大値に対する，$H_0^{(1)}$ のもとでのデータの条件付き尤度の最大値の比であるが，これが F 統計量の非線形な関数となることは容易に証明できる（例えば，Anderson, 1984, p. 406）．また，(28) 式の右辺第 2 項 λ_2 も同様な議論により t 統計量の非線形な関数となることは容易に証明できる．

これらより，以下のことが言える：

1．F は，$H_0^{(1)}$ のもとでの局外母数，すなわち μ_1, μ_2 及び共通分散 σ^2 に関する補助統計量である（すなわち，F は μ_1, μ_2 及び共通分散 σ^2 に依存しない）．
2．t は，μ_1, μ_2 及び共通分散 σ_2 に対する同時充足統計量の非線形関数であり，充足性を持つ．さらに，t は完備 (Lehmannn & Scheffé, 1950) なので，完備充足統計量である．

そこで，上記 Hogg (1961) 及び Hogg & Craig (1956) の定理より，等分散仮説が成り立つ時，2 つの統計量 F と t は統計的に互いに独立である (**Q.E.D.**)．

ここで，2 種類の検定を続けて行う場合の全体的危険率 α^* は，2 種類の検定のいずれか一方でも棄却される確率なので，これを $P(H_1^{(1)}\cup H_1^{(2)})$ と書くとする．この時，一般に

$$\alpha^*=P(H_1^{(1)}\cup H_1^{(2)})=1-P(H_0^{(1)}\cap H_0^{(2)}), \tag{29}$$

と書ける．ここで，右辺の $P(H_0^{(1)}\cup H_0^{(2)})$ は，2 種類

の検定で共に帰無仮説を採択する確率を表すものとする．

ここで，さらに上記のような 2 種類の検定 (F と t) が統計的に独立であれば，つぎが成り立つ：

$$\alpha^* = P(H_1^{(1)} \cup H_1^{(2)}) = 1 - P(H_0^{(1)})P(H_0^{(2)}). \quad (30)$$

そこで，それぞれの検定の危険率を順に α_1, α_2 に設定するならば，

$$\alpha^* = P(H_1^{(1)} \cup H_1^{(2)}) = 1 - (1-\alpha_1)(1-\alpha_2). \quad (31)$$

そこで，第 1 節の永田 (2008) の方式での全体的危険率は，$\alpha_1 = 0.20, \alpha_2 = 0.05$ であるとすれば，明らかに 0.24 となる．

一方，もし 2 種類の検定の危険率を共に α に設定するならば，

$$\alpha^* = P(H_1^{(1)} \cup H_1^{(2)}) = 1 - (1-\alpha)^2. \quad (32)$$

これより，以下の式も導かれる：

$$\alpha = 1 - (1-\alpha^*)^{\frac{1}{2}}. \quad (33)$$

応用例 2

もう 1 つの応用例としては，最近 Chino ら (Chino, 2008; Chino & Saburi, 2006, 2009, 2010) が進めている，非対称 MDS の分析の前や途上で行うべき特別な 3 次元分割表の分析のための基礎としての，2 次元分割表に関わる幾つかの対称性関連の検定統計量の独立性に関するものである．紙面の都合上，今回は簡単にふれるにとどめる．

これまで，対称性関連の検定統計量は数理統計学の分野で数多く提案されているが，これらの対称性関連の検定統計量間の独立性の有無については，これまでほとんど議論されていない．例えば，Goodman (1985) は，複数の対称性検定や関連検定間の関係について議論しているが，それらの統計量間の独立性については考察していない．また，Tomizawa (1992) は，幾つかの伝統的な対称性とその関連統計量及び彼の開発した 2 重対称性検定統計量間の階層的構造について考察し，それらの統計量間の比較を AIC を用いて検討しているが，それらの統計量間の独立性については考察していない．これに対して，Chino らは最近これらのうちの対称性検定，準対称性検定，周辺等質性の検定間の統計的独立性の有無について考察しており，最近この問題に対してほぼ最終的な結論を得た．すなわち，これら 3 つの統計量は，相互に独立であると推論される (Chino & Saburi, 2010).

References

Anderson, T. W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis.* 2nd Ed. New York: Wiley.

Bancroft, T. A. (1944). On biases in estimation due to the use of preliminary tests of significance. *The Annals of Mathematical Statistics,* **15**, 190–204.

Barndorff-Nielsen, O. (1978). *Information and Exponential Families in Statistical Theory.* New York: Wiley.

Basu, D. (1955). On statistics independent of a complete sufficient statistic. *Sankhy = a,* **15**, 377–380.

Bloom, D. M. (1979). *Linear Algebra and Geometry.* Cambridge: Cambridge University Press.

Chino, N. (1998). Hilbert space theory in psychology (1)—Basic concepts and possible applications. *Bulletin of the Faculty of Letters of Aichi Gakuin University,* **28**, 45–65.

Chino, N. (2008). Tests for symmetry in asymmetric MDS. In K. Shigemasu, A. Okada, T. Imaizumi, T. Hoshino, (Eds.), *New Trends in Psychometrics* (pp. 33–40). Tokyo: Universal Academic Press.

Chino, N., & Saburi, S. (2006). Tests of symmetry in asymmetric MDS. *Paper presented at the 2nd German Japanese Symposium on Classication—Advances in data analysis and related new techniques & application.* Berlin, Germany, March 7–8.

Chino, N., & Saburi, S. (2009). Controlling the two kinds of error rate in selecting an appropriate asymmetric MDS models. *The 6th International Conference on Multiple Comparison Procedures,* Tokyo, Japan.

Chino, N., & Saburi, S. (2010). Independence of some test statistics for symmetry (2). *Paper to be presented at the 38th annual meeting of the Behaviormetric Society of Japan.* Saitama Univ., September.

Dodge, H. F., & Roming, H. G. (1929). A method of sampling inspection. *Bell System Technical Journal,* **8**, 613–631.

Hogg, R. V. (1961). On the resolution of statistical hypotheses. *Journal of the American Statistical Association,* **56**, 978–989.

Hogg, R. V., & Craig, A. T. (1956). Sufficient statistics in elementary distribution theory. *Sankhy = a,* **17**, 209–216.

Holm, S. (1979). A simple sequentially rejective multiple test procedure. *Scandinavian Journal of Statistics,* **6**, 65–70.

Kendall, M. G., & Stuart, A. (1973). *The Advanced Theory of Statistics; Vol. 2, Inference and Relationship.* London: Griffin.

Kitagawa, T. (1950). Successive process of statistical inferences. *Memoirs of the Faculty of Scinece, Kyusyu University,* Series A, **5**, 139–180.

国沢清典 (1968). 確率統計演習 2　統計　培風館

Lehmann, E. L. (1983). *Theory of Point Estimation.* New York: Wiley.

Lehmann, E. L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses.* 2nd Ed.

New York: Wiley.

Lehmann, E. L., & Scheffé, H. (1950). Completeness, similar regions, and unbiased estimation—Part I. *Sankhy = a,* **10**, 305–340.

Mahalanobis, P. C. (1940). A sample survey of the acreage under jute in Bengal, with discussion on planning of experiments. *Proceedings of the 2nd Indian Statistical Conference,* Calcutta, Statistical Publishing Society.

Marcus, R., Peritz, E., & Gabriel, K. R. (1976). On closed testing procedures with special reference to ordered analysis of variance. *Biometrika,* **63**, 655–660.

Naik, U. D. (1975). Some selection rules for comparing p processes with a standard. *Communications in Statistics,* **4**, 519–535.

日本数学会編 (2007). 岩波数学辞典　第 4 版　岩波書店

Rao, C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and Its Applications.* 2nd ed. New York: Wiley.

竹内啓 (1973). 数理統計学の方法的基礎　東洋経済新報社

永田靖 (2008). 入門統計解析法　日科技連

Wald, A. (1945). Sequential tests of statistical hypotheses. *The Annals of Mathematical Statistics,* **16**, 117–184.

Wald, A. (1947). *Sequential analysis*. New York: Wiley.

最終版平成22年 7 月30日受理

Bulletin of The Faculty of Psychological & Physical Science, No. 6, 119–128, 2010

Review

Statistical Independence and Related Topics (1)

Naohito CHINO

Abstract

Several topics on statistical independence are discussed. Major definitions of the notion of independence made in mathematics are overviewed, first, those which include algebraic dependence, linear dependence, and statistical independence. Second, several theorems on the independence of random variables as well as test statistics are revisited. It is argued that Basu's theorem (Basu, 1955) and Hogg's theorem (Hogg, 1961) are specifically essential and important in examining the statistical independence of some test statistics. Third, definitions of ancillary statistic and complete statistic, which play fundamental roles in understanding some theorems on the statistical independence, are made. It is pointed out that the notion of completeness is closely related to the orthogonality of functions. Moreover, an important theorem on the completeness of statistic, i.e., Lehmann's theorem (1983), is introduced. Finally, two applications of the theorems on statistical independence to real problems are overviewed.

Keywords: statistical independence, ancillary statistics, complete sufficient statistics, the unicity theorem, likelihood ratio test