愛知学院大学心身科学部紀要第12号（93–99）（2016）

〈総説〉

線形・非線形時系列解析とその応用 (3)

千　野　直　仁*

この論文では，われわれは時系列から力学的情報を再構成する問題を扱う．とりわけ，単一の正弦波時系列が与えられた場合, 等間隔でサンプリングされた時系列のアトラクタの再構成の問題を扱う．そのような時系列からアトラクタを再構成するために，我々はサンプリングされた時系列をある次元例えばp次元の空間に埋め込み，当該時系列からp次元の座標値を計算する．我々の関心は，サンプリングされた時系列から，もとの時系列と同じ力学的情報を再現できるかにある．ここでは，もとの正弦時系列の力学的特性は円（代数的には楕円）である．サンプリング間隔を100としたとき，3次元空間内に得られたカーブの力学的特性は，一見したところでは2次元トーラスと似ていたが，もとの時系列の力学的特性と同じであった．もちろん，我々はある特別なサンプリング間隔を持つ時系列の場合，異なるアトラクタを得ることになろう．

キーワード：アトラクタ再構成，正弦時系列，埋め込み，アトラクタ

1　はじめに

この論文は，昨年筆者が本紀要に投稿した同一タイトルでの2本の論文（千野，2015a, 2015b）の続報である．第1報では，伝統的な時系列解析の歴史を簡単に紹介し，人工的時系列データに対する伝統的時系列解析すなわち線形時系列解析の適用結果と，同時系列に対するカオス時系列（非線形時系列）解析の適用例について紹介し，最後に単純な周期時系列の例としてのサインカーブから得られる時系列データの間引きについて議論した．

しかし，そこでのサインカーブから得られた時系列データの間引き結果の解釈については，本紀要の「訂正」欄に記したように，ある間引き間隔でもとのデータを間引くと，間引き前の軌道特徴である閉曲線の特徴が失われ，トーラス上のアトラクタが得られる，と結論付けたがこれは正しくないことを示すことが，本論文の目的である．

2　正弦波時系列とその間引き

ここでは，昨年の第1報で議論したと同一の正弦波時系列 $x = sin(t)$, $t = 1, 2, \cdots, N$ を間引きすることを考える．ここで，t はラジアン単位で与えるものとし，例えばもとの時系列は $N = 3{,}000$ で，区間 $t = [0, N]$ を0.1ラジアンステップで30,000時点分発生させるとする．

この時系列を間引き間隔 τ で間引いた時系列を2次元空間に埋め込むとすれば，

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sin(t+\tau), \qquad t = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{1}$$

3次元空間に埋め込むとすれば，

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sin(t+\tau), \qquad t = 1, 2, \cdots \\ z = \sin(t+2\tau). \end{cases} \tag{2}$$

ここで，$a = cos\tau$，$b = sin\tau$ とおけば，$a^2 + b^2 = 1$ に注意すると，まず (1) 式より，

＊愛知学院大学心身科学部心身科学科
（連絡先）〒470–0195 愛知県日進市岩崎町阿良池12　E-mail: chino@dpc.agu.ac.jp

$$x^2 - 2axy + y^2 = b^2. \tag{3}$$

これを行列表現すれば,

$$\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{A} \boldsymbol{u} = b^2. \tag{4}$$

ここで,

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

ここで, $\boldsymbol{A}$ の固有値は $1 \pm |a|$, 固有ベクトルは $x = -y$. そこで，座標軸の $-\pi/4$ の回転を行えば,

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} \boldsymbol{u}^*. \tag{6}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^* &= \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{B} &= \begin{pmatrix} cos(-\frac{\pi}{4}) & -sin(-\frac{\pi}{4}) \\ sin(-\frac{\pi}{4}) & cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{7}$$

より，(6) 式を (4) 式に代入して整理し，スカラー表現すれば,

$$(1+a)x^{*2} + (1-a)y^{*2} = b^2. \tag{8}$$

このことから (3) 式は楕円の方程式であることがわかる.

同様に，(2) 式の z の右辺の展開から

$$y^2 - 2ayz + z^2 = b^2. \tag{9}$$

これより (9) 式は（y, z）平面上の楕円であることがわかる.

つぎに，(1) 式で $\tau = 1$ の時，すなわち間引きをしない場合，時系列信号は正弦波となるが，τ を大きくしていくと, 時系列は正弦波とは異なるものが得られる. 例えば，図 1 は $\tau = 100$ とした場合の時系列信号を示す．ここで，図 1 a は間引き後の信号を，図 1 b はその最初の48時点分の信号を示す.

図 1 b をみると，間引き後の信号は正弦波とは大きく異なることがわかる．そこで，この信号の位相的特徴を見るために，これを (2) 式による 3 次元空間に埋め込んだのが図 2 である．図 2 の信号は，一見 3 次元空間上に広がるトーラスのようにもみえるが，この信号を 3 変数からなる多次元データと見て主成分分析を行うと， 3 番目の固有値はゼロであるので，この信号は 2 次元の広がりしか持たないことがわかる.

そこで，図 2 の信号の最初の 3 時点分及び同 6 時点分のみをプロットして軌道の特徴を調べると，図 3 及び図 4 のようになる.

図 3 , 4 から，図 2 の解軌道の外側の境界は図 3 のような 3 点を頂点とする無数の 3 角形により構成される平面上の軌道に外接する楕円であり，内側の境界は

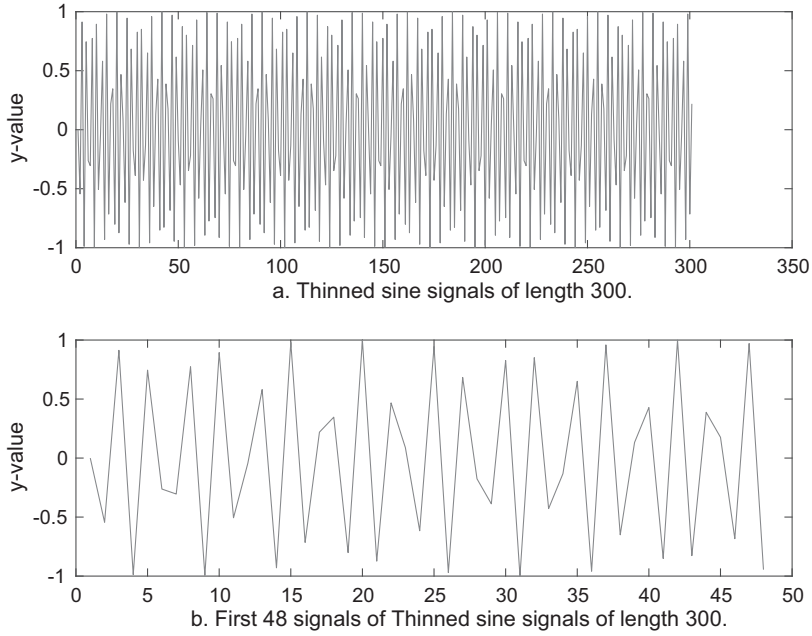

図 1 ：正弦波の1/100間引き後の信号とその一部切り出し（図 1 a は，千野，2015a, 図 8 a と同一）

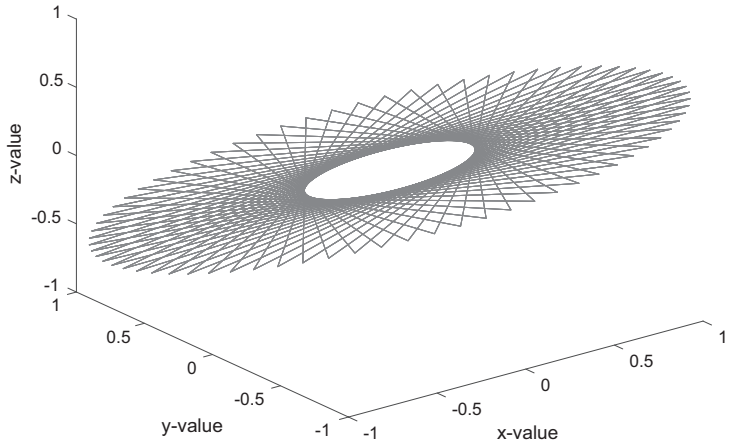

図 2 ：正弦波の1/100間引き後の信号の 3 次元埋め込み結果（点列の隣接 2 時点間を線分で結んだもの）
（千野，2015a の図10と同一）

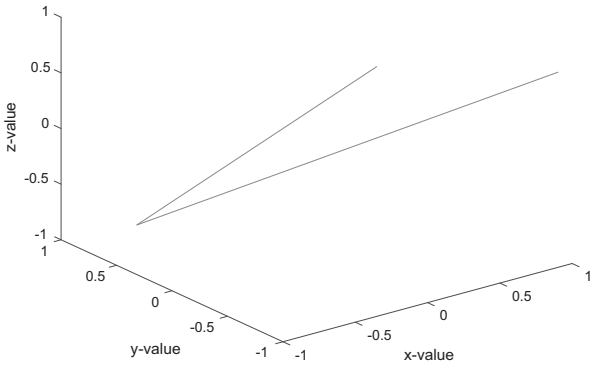

図 3 ：正弦波の1/100間引き後の信号の最初の 3 時点分の
3 次元埋め込み結果
（点列の隣接 2 時点間を線分で結んだもの）

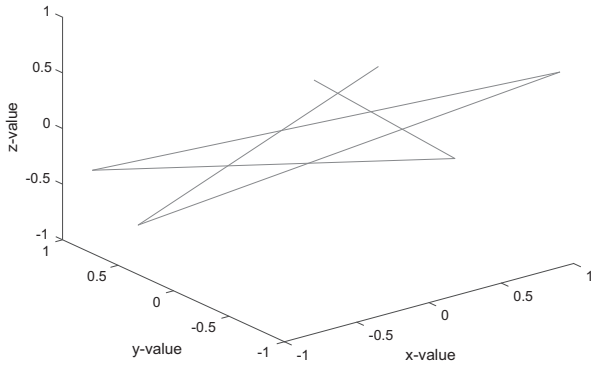

図 4 ：正弦波の1/100間引き後の信号の最初の 6 時点分の
3 次元埋め込み結果
（点列の隣接 2 時点間を線分で結んだもの）

同軌道に内接する楕円であるように見える．しかし，この推論は間違いで，解軌道はあくまでも図 2 の外側の楕円上にある．というのは，図 2 では解軌道を描くに際して点列の隣接 2 時点間を線分で結んでいるが，そもそも図 2 の時系列信号は，その発生のさせ方からは連続的な信号ではなく離散的な信号である．そこで，解軌道として隣接 2 時点間を線分で結ばず単に点列として 3 次元空間に埋め込み表示してみると図 5 となる．図 5 からは，解軌道が楕円軌道であることが明らかである．さらに，その解軌道は図 2 の一見トーラス的な図の外側の境界を結んだものであることも明らかである．結局，図 2 を MATLAB の 3 次元プロットルーチン plot 3で描くに際して，隣接する解軌道を線分で結んだことが間違いのもとであることがわかる．

なお，㈱あいはらの SCT（Sunday Chaos Times）でも解軌道の多次元空間への埋込みに際しては，うえのような例の場合にも隣接 2 時点間を線分で結ぶので注意が必要である．

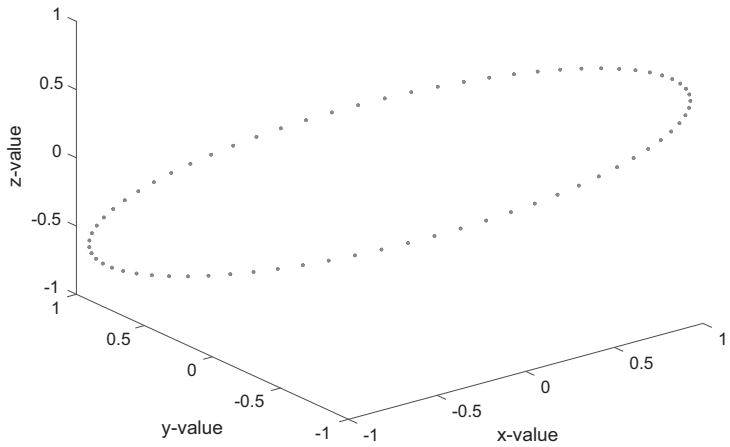

図 5 ：1/100間引き後の図 1 の信号の 3 次元空間への埋め込み結果（点列）

3　幾何学的トーラスと力学系の軌道としてのトーラス

この節では，2 種類のトーラスの例について述べ，第 1 節での正弦波時系列の間引き後の軌道特性との違いにふれる．

幾何学的トーラスは輪環面とも呼ばれ，3 次元空間（x, y, z）内の例えば (x, z) 平面の x 軸上で原点から十分離れた位置に中心を持つ円を描き，これを z 軸の周りに回転して得られる（例えば, 小林, p. 46）．ここで，円の原点からの距離を R とし，円を媒介変数表示（動径 r, 偏角 θ）し, 円の z 軸からの回転角を ϕ とすると，トーラスは，次式で表される：

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\theta)\cos\phi, \\ y = (R + r\cos\theta)\sin\phi, \\ z = r\sin\theta. \end{cases} \tag{10}$$

図 6 は $R = 5$，$r = 1$ としてこれを描いたものである．

一方，力学系の解軌道として得られるトーラスの例として，ラングフォード方程式（Langford equation）(Langford, 1984) を見てみよう．この方程式は，

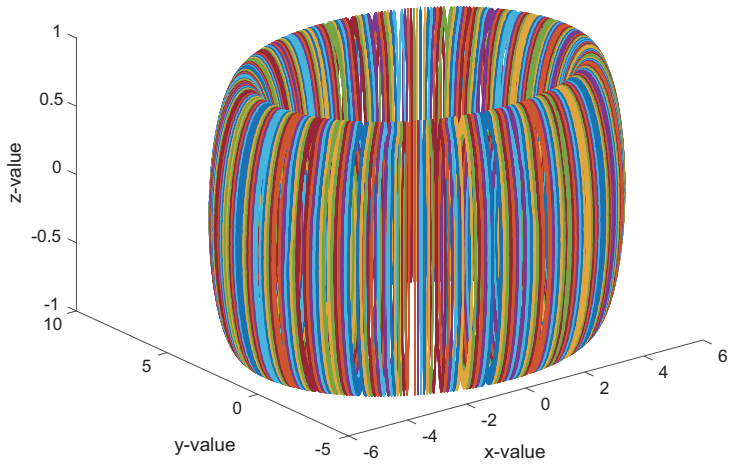

図 6 ：輪環面（トーラス）

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (z-B)x - Dy, \\ \frac{dy}{dt} = Dx + (z-B)y, \\ \frac{dz}{dt} = C + Az - \frac{z^3}{3} - (x^2+y^2)(1+Ez) + Fzx^3. \end{cases} \tag{11}$$

なる 3 次元の非線形 1 階微分方程式系であり，よく知れているようにパラメータ A，B，C，D，E，F によりトーラスやカオスが得られる．図 7 は，2–トーラス（準周期解）を生成する $A = 1$，$B = 0.7$，$C = 0.6$，$D = 3.5$，$E = 0.25$，$F = 0$ の第 1 変数の解軌道を示す．また，図 8 はこの第 1 変数の解軌道を 3 次元空間に埋め込み，隣接 2 時点間を線分で結んだものである．これに対して，図 9 は 3 変数の解軌道を 3 次元上に点列として表示したものである．

図 8 を図 2 の正弦波の1/100間引き後の信号の 3 次元埋込み結果と比較しただけでは，図 8 の解軌道が 3 次元的な厚みを持ったものかどうかは判然としない．

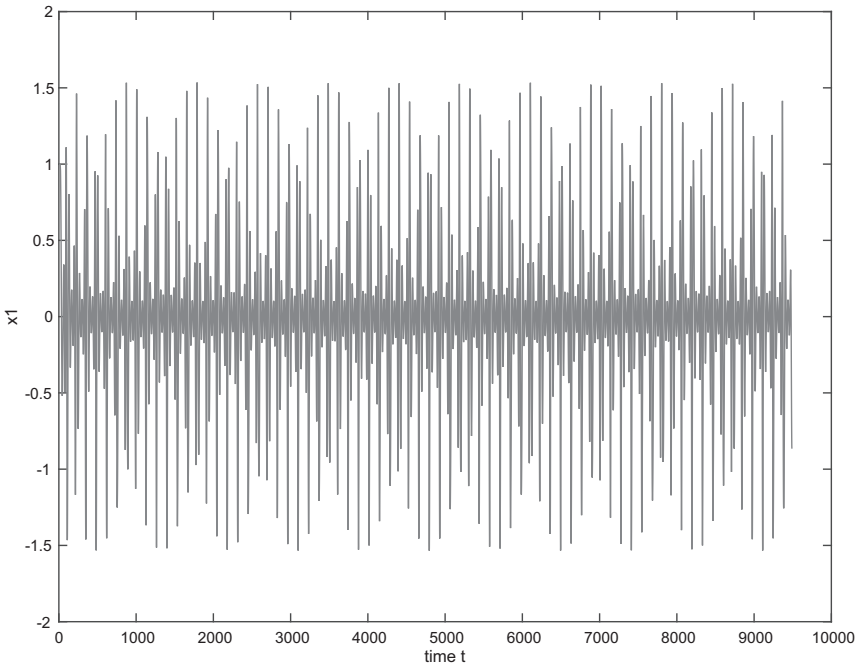

図 7 ：ラングフォード方程式の第 1 変数の時系列信号

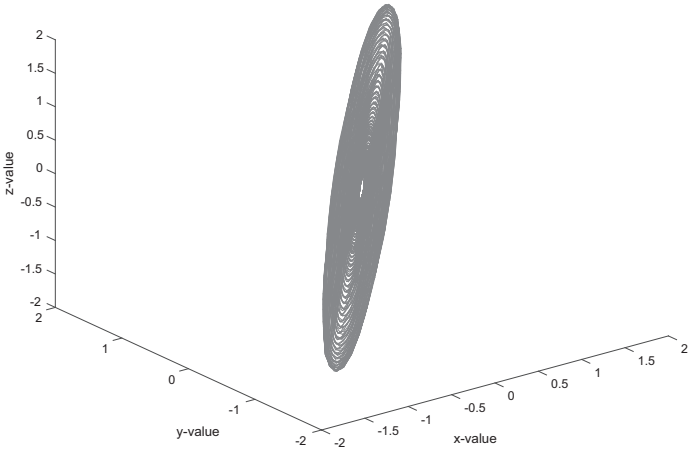

図 8 ：ラングフォード方程式の第 1 変数の解軌道の 3 次元埋め込み結果(点列の隣接 2 時点間を線分で結んだもの)

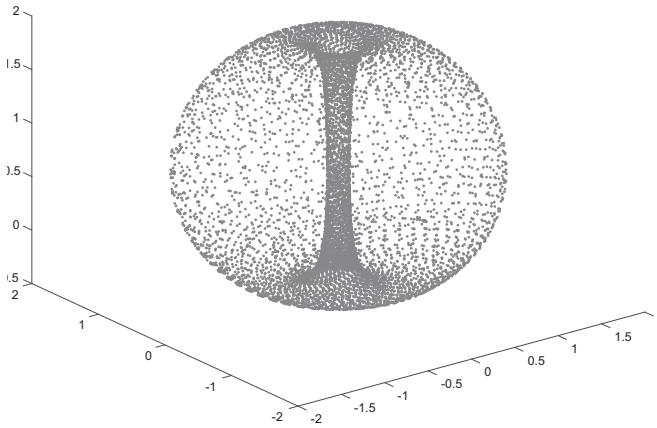

図 9 ：ラングフォード方程式の解軌道のトーラス局面（点列）

そこで，まず図 2 の場合と同様，この解軌道の 3 次元埋め込みデータを 3 変数データと見て主成分分析を行うと，その固有値は 3 つとも正となり，図 2 とは異なり 3 次元的な厚みを持つことがわかる．このことは，3 変数の解軌道を 3 次元空間上に表示した図 9 を見ても確認できる．

4　結　論

いずれにせよ，正弦波時系列をこの論文で行ったように 1/100 の割合で間引きすることにより得られる一見（3 次元的厚みのある）トーラスに見える図 1 の第 1 変数の解軌道は，図 9 のラングフォート方程式により得られる 2 次元トーラス（2-torus）と異なり，結局 1 次元トーラス（1-torus）となることがわかる．ただし，正弦波時系列をある特定の間隔 τ で等間隔に間引くと，その位相は円と同相ではなくなるので，注意が必要である．

上記のような問題は，力学系の埋め込み問題の特別な場合である．一般的には埋め込み問題は，多次元力学系の埋め込み問題として知られ，古くは Whitney (1936) や Sauer et al. (1991) などが知られている．しかし，現実に入手できる力学系はうえの例を特殊例とする 1 次元時系列の場合も多い． 1 次元時系列の埋め込みについては，Takens (1981), Noakes (1991), Sauer et al. (1991) 等が知られている．

一方，周期的信号が単純な正弦波のようなものではなく，複数の振幅の波が周期的に繰り返すような信号の場合はどうであろうか．そのような場合，間引き間隔次第では特定の振幅の波がすべてカットされてしまうケースがあるとすれば，間引き前と間引き後で信号の位相は異なったものにならないであろうか．この問題は，古くから知られたナイキストの標本化定理（the sampling theorem）(Nyquist, 1928) に関係するものと思われる．一方，間引き間隔を等間隔に取らないでランダムに取った場合は，どのような位相になるか予想できない．また，カオス力学系の信号を等間隔で間引くと同相な信号が予想されるが，ランダムに取った場合はやはりどんな位相になるかは予想できない．

References

小林昭七 (2015). 曲線と曲面の微分幾何（改訂版）　裳華房

Langford, W. F. (1984). Numerical studies of torus bifurcations. *International Series of Numerical Mathematics*, **70**, 285–295.

Noakes, L. (1991). The Takens embedding theorem. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **1**, 867–872.

Nyquist, H. (1928). Certain topics in telegraph transmission theory. *American Institute of Electrical Engineers*, Transactions, **47**, 617–644.

Sauer, Y., Yorke, J. A., & Casdagli, M. (1991). Embedology. *Journal of Statistical Physics*, **65**, 579–616.

Takens, F. (1981). Detecting strange attractors in turbulence. In D. A. Rand and B. S. Young, (Eds.), *Dynamical Systems of Turbulence*, Vol. **898** of Lecture Notes in Mathematics (pp. 366–381). Berlin: Springer-Verlag.

Whitney, H. (1936). Differentiable manifolds. *The Annals of Mathematics*, **37**, 645–680.

最終版平成28年 9 月28日受理

Bulletin of The Faculty of Psychological & Physical Science, No. 12, 93–99, 2016

Linear and Nonlinear Time Series Analyses and their Application (3)

Naohito CHINO

Abstract

In this paper we deal with the problem of recontructing dynamical information from time series. Specifically, we deal with the problem of attractor reconstruction, from a sampled time series by an equal interval, given a single sinusoidal time series. To reconstruct an attractor from such a time series, we embed the sampled time series in a certain dimensional space, say a p-dimensional space, and compute the p-dimensional coordinates from the time series. Our interest is whether we can recover the same dynamical information as the original time series, given the sampled time series. Here the dynamical property of the original sinusoidal time series is a circle (algebraically, an ellipse). When the sampling interval was 100, the dynamical property of the obtained curve in a three dimensional space was the same as that of the original time series, although at a glance it was similar to a two-dimensional torus. Of course, we might have a different attractor with the sampled time series with a special sampling interval.

Keywords: attractor reconstruction, sinusoidal time series, embedding, attractor